

Силаева Т.А. Методы решения задач оптимального проектирования вычислительных систем: Учебное пособие к лабораторным работам. — М.: Изд-во МАИ, 2000. — 92 с.: ил.

Лабораторные работы, выполняемые в дисплейном классе, позволяют студентам изучить и практически овладеть методами решения задач оптимального проектирования, в том числе методами решения задач безусловной оптимизации, условной оптимизации и линейного программирования.

Предназначены для студентов специальностей «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» и «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», а также могут быть полезны аспирантам, научным сотрудникам и инженерам, специализирующимся в области вычислительной техники.

Рецензенты: В.И. Попов, В.Ю. Рутковский, В.М. Суханов

## Работа 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Цель работы: изучить и практически овладеть основными методами решения задач безусловной оптимизации.

### ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

#### Постановка задачи оптимального проектирования ЭВМ, систем и сетей

Задача оптимального проектирования на любом иерархическом уровне заключается в определении оптимальной структуры проектируемого объекта на этом уровне и/или его оптимальных параметров.

Под оптимальным будем понимать такой вариант структуры и/или параметров объекта, при котором критерий оптимальности, описывающий качество или эффективность объекта, принимает оптимальное (наилучшее) значение, а управляемые параметры удовлетворяют ограничениям, описывающим требования технического задания (ТЗ) на проектирование объекта. Критерий оптимальности называют также целевой функцией, а оптимальное значение функции — экстремумом (им может быть минимум или максимум).

Пример задачи оптимального проектирования: определение структуры ЭВМ максимальной производительности при заданных массогабаритных ограничениях, надежности и потребляемой мощности.

В формализованном виде задача оптимального проектирования записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{extr } f(X); \\ & X \in XD \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$XD = \{X \mid \Phi(X) = 0; \Psi(X) \leq 0\}. \quad (1.2)$$

Задача (1.1)—(1.2) нахождения экстремума  $f(X)$  состоит в определении оптимального значения  $X^*$  (или значений, если их несколько) вектора  $X = (x_1, \dots, x_n)$  управляемых параметров, при

котором скалярная целевая функция  $f(X)$  принимает оптимальное значение (или значения) при условии, что  $X$  принадлежит области допустимых значений  $XD$ , задаваемой ограничениями (1.2) типа неравенств  $\Psi(X) \leq 0$  и/или равенств  $\Phi(X) = 0$ . Данные ограничения записаны в векторной форме и их можно переписать в скалярной форме, например, вместо  $\Phi(X) = 0$  будет  $\varphi_j(x_1, \dots, x_n) = 0$  ( $j = \overline{1, m}$ ,  $m < n$ ).

В общей постановке задача оптимального проектирования представляет собой задачу математического программирования.

Из постановки задачи оптимального проектирования следует, что для ее формулировки и решения вначале необходимо:

1) выделить некоторую совокупность управляемых параметров проектирования — вектор независимых переменных  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , фиксация значений которых определяет один из вариантов структуры объекта, его параметры и количественные характеристики, в том числе значения целевой функции и функций ограничений;

2) сформировать скалярную целевую функцию  $f(X)$ ;

3) из ТЗ сформировать функции ограничений  $\Psi(X)$  и  $\Phi(X)$ , если таковые имеются.

Существуют следующие способы построения целевой функции:

1. Если имеется один частный критерий эффективности или качества проектируемого объекта, то его и принимаем за целевую функцию  $f(X)$ .

2. Если существует набор частных критериев эффективности  $f_1(X), f_2(X), \dots, f_s(X)$ , то возникает многокритериальная задача. Она сводится к однокритериальной путем формирования обобщенного критерия оптимальности, который и используем в качестве целевой функции:  $f(X) = f(f_1(X), f_2(X), \dots, f_s(X))$ .

Обобщенный критерий формируется одним из следующих способов:

2.1. Из частных критериев выделяем наиболее важный  $f_j(X)$ , а остальные не рассматриваем, тогда  $f(X) = f_j(X)$ .

2.2. Как аддитивный (в виде суммы) критерий

$$f(X) = \sum_{k=1}^s \alpha_k f_k(X),$$

где  $\alpha_k$  — весовые коэффициенты, и они могут быть как больше нуля, если  $f(X)$  увеличивается при росте  $f_k(X)$ , так и меньше нуля в противном случае.

2.3. Как мультипликативный (в виде произведения) критерий

$$f(X) = \prod_{k=1}^s f_k^{\alpha_k}(X).$$

2.4. Как минимаксный критерий  $\min_{X \in XD} \left[ \max_k f_k(X) \right]$ , т.е.

$$f(X) = \max_k f_k(X).$$

2.5. В виде максиминного критерия  $\max_{X \in XD} \left[ \min_k f_k(X) \right]$ , т.е.

$$f(X) = \min_k f_k(X).$$

В общей постановке задача (1.1)—(1.2) оптимального проектирования представляет собой задачу математического программирования. Существуют следующие виды данной задачи:

1. Если отсутствуют ограничения на значения управляемых параметров, то имеем задачу безусловной оптимизации (или задачу на безусловный экстремум).

2. Если ограничения существуют, то это задача условной оптимизации.

3. Если  $f(X)$  и все функции ограничений линейны, то имеем задачу линейного программирования.

4. Если хотя бы одна функция среди  $f(X)$  и функций ограничений (1.2) нелинейна, то приходим к задаче нелинейного программирования.

5. Если некоторые или все управляемые параметры могут принимать лишь определенные дискретные значения, то имеем задачу дискретного программирования.

6. Если управляемые параметры могут принимать только целочисленные значения, то приходим к задаче целочисленного программирования.

Экстремум может быть глобальным и локальным, и соответственно имеем задачи нахождения глобального или локального экстремума.

Глобальным минимумом функции  $f(X)$  на множестве  $XD \subset E^n$  ( $E^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство) называется та-

кая точка  $X^* \in XD$ , для которой при любом  $X \in XD$  выполняется  $f(X^*) \leq f(X)$ . Для глобального максимума выполняется  $f(X^*) \geq f(X)$ . Точке в  $E^n$  соответствует  $n$ -мерный вектор.

Точка  $X^* \in XD$  называется локальным минимумом функции  $f(X)$  на множестве  $XD \subset E^n$ , если существует  $\epsilon > 0$ , при котором для всех  $X \in XD$ , и таких, что  $|X - X^*| < \epsilon$  (т.е. для  $X$  из  $\epsilon$ -окрестности точки  $X^*$ ), справедливо  $f(X^*) \leq f(X)$ . Для локального максимума:  $f(X^*) \geq f(X)$ . Локальных минимумов и максимумов может быть несколько, а глобальный — только один.

Задача нахождения  $\max_X f(X)$  сводится к нахождению  $\min_X (-f(X))$ , т.е. достаточно изучить методы решения задачи поиска минимума.

### Типовые задачи оптимального проектирования ЭВМ, систем, сетей и БИС

Перечислим несколько групп типовых задач оптимального проектирования:

1. Многие задачи выбора состава оборудования в вычислительных системах и сетях сводятся к задачам дискретного и целочисленного программирования:

$$\text{extr}_{X \in XD} f(X),$$

$$XD = \{X \mid Y(X) \leq Y_T, X \in D\},$$

где  $X = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, \dots, y_m)$ ,  $Y_T = (y_{T1}, \dots, y_{Tm})$ . Вектор  $X$  управляемых параметров определен на дискретном множестве  $D$  или на множестве целых чисел. Значение  $X$  может характеризовать количество элементов каждого типа в системе или сети, указывать на наличие или отсутствие каждого элемента и соединения в структуре системы или сети. В качестве целевой функции  $f(X)$ , а также каждой из функций ограничений  $y_j(X)$  ( $j = \overline{1, m}$ ) может выступать одна из выходных характеристик системы или сети, например среднее время решения задачи в системе, вероятность отказа в решении, производительность системы, надежность системы или сети, коэффициент загрузки оборудова-

ния, пропускная способность сети передачи данных. Требуемые значения  $Y_T$  задаются в ТЗ. Кроме того, при необходимости  $f(X)$  может быть сформирована как функция нескольких выходных характеристик системы, не используемых в  $Y(X)$ , в соответствии с уже рассмотренными способами нахождения обобщенного критерия оптимальности.

Примеры задач первой группы:

1.1. Задача выбора количества  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) устройств каждого типа (процессоров, модулей памяти, устройств ввода-вывода и т.д.) в вычислительной системе. При этом  $x_i \in \{0, 1, 2, \dots, u_i\}$ , где  $u_i$  — максимально возможное число устройств  $i$ -го типа в системе.

1.2. Задача выбора каналов связи  $x_{st}$  между пунктами  $s$  и  $t$  в сети передачи данных, где  $x_{st} \in \{0, 1\}$  и 0 будет означать отсутствие в структуре сети соответствующего устройства или соединения, а 1 — наличие.

Задачи 1.1 и 1.2 сводятся к задачам целочисленного линейного программирования, если в качестве  $f(X)$  и  $y_j(X)$  выбираются аддитивные функции числа устройств (стоимость, производительность, энергопотребление, габариты, масса). Если исходная функция мультипликативная, то ее можно свести к аддитивной путем логарифмирования.

2. Задачи оптимизации вычислительной системы, рассматриваемой как система массового обслуживания. Часть этих задач формулируются в виде задач нелинейного программирования, другие сводятся к задачам дискретного и частично-дискретного программирования. Примером задачи этой группы служит синтез структуры памяти специализированной ЭВМ.

3. Задачи параметрической оптимизации. Они сводятся к задачам нелинейного программирования с непрерывными переменными. К ним относятся задачи параметрической оптимизации при функционально-логическом проектировании, например, задача расчета оптимальных значений внутренних параметров фрагментов БИС (задержек распространения сигналов и мощности рассеяния в фрагментах БИС).

4. Задачи оптимизации на конструкторском (топологическом) уровне проектирования БИС, СБИС и печатных плат. Чаще всего это задачи коммутационно-монтажного проектирования, а именно компоновка, размещение и трассировка. Большинство из них сводится к задаче целочисленного линейного программирования.

5. Задачи оптимизации физической структуры и геометрических размеров компонентов интегральных схем, оптимизации электронных схем. Они сводятся к задачам нелинейного программирования с непрерывными переменными.

В данной лабораторной работе рассмотрим методы решения задач безусловной оптимизации функции  $f(X)$ , т.е. задач вида  $\text{ext}_X f(X)$ .

#### Классический метод, основанный на необходимом и достаточном условиях экстремума

Классический метод нахождения безусловного экстремума функции  $f(X)$  можно использовать, когда известно ее аналитическое выражение и она по крайней мере дважды дифференцируема по  $X$ .

Градиентом  $\nabla f(X')$  функции  $f(X)$  в произвольной точке  $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$  называется вектор первых частных производных  $f(X)$  по всем  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) в этой точке  $X'$ :

$$\nabla f(X') = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(X'), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X'), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X') \right).$$

Матрицей Гессе  $A(X')$  функции  $f(X)$  в точке  $X'$  называется симметрическая матрица размером  $n \times n$  частных производных второго порядка функции  $f(X)$  в точке  $X'$ :

$$A(X') = [a_{ij}(X')] = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X') \right].$$

Необходимое условие экстремума функции  $f(X)$  в точке  $X'$  имеет вид:

$$\nabla f(X') = 0, \quad (1.3)$$

или в скалярной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1.4)$$

Точки  $X'$ , в которых выполняется (1.3), называются стационарными. Точка  $X^*$  экстремума (минимума или максимума) обя-

зательно является стационарной точкой, но стационарные точки — не обязательно точки экстремума. Например, в случае  $f(x)$ , изображенной на рис. 1.1, стационарными точками будут:  $x^*$  и  $x'$ , причем  $x^*$  — точка минимума, а  $x'$  — точка перегиба функции, не являющаяся ни минимумом, ни максимумом.

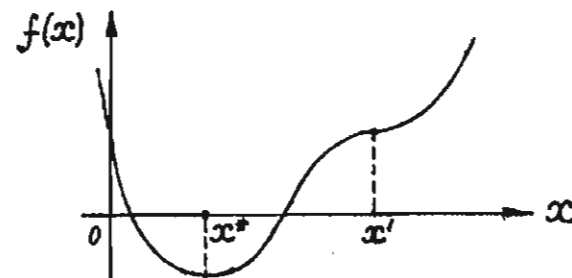


Рис. 1.1

Классический метод нахождения безусловного экстремума функции состоит в формировании на основе необходимого условия экстремума системы уравнений (1.4) для поиска стационарных точек исследуемой функции, решении данной системы и в выявлении точек минимума и максимума среди стационарных точек на основе использования достаточного условия экстремума.

Достаточным условием максимума функции  $f(X)$  в точке  $X^*$  является отрицательная определенность матрицы Гессе  $A(X^*)$  этой функции в точке  $X^*$ , а достаточным условием минимума — положительная определенность  $A(X^*)$ .

По теореме Сильвестра матрица Гессе  $A(X^*)$  будет положительно определенной, если для всех ее определителей  $\Delta_j(X^*)$  с первого до  $n$ -го порядка выполняются условия:

$$\Delta_1(X^*) = a_{11}(X^*) > 0,$$

$$\Delta_2(X^*) = \begin{vmatrix} a_{11}(X^*) & a_{12}(X^*) \\ a_{21}(X^*) & a_{22}(X^*) \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$\Delta_n(X^*) = \begin{vmatrix} a_{11}(X^*) & \dots & a_{1n}(X^*) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(X^*) & \dots & a_{nn}(X^*) \end{vmatrix} > 0,$$

и отрицательно определенной, если  $\Delta_j(X^*) < 0$  при нечетных  $j$  и  $\Delta_j(X^*) > 0$  при четных  $j$  ( $j = \overline{1, n}$ ).

Отсюда следует, что если все определители  $\Delta_j(X^*) > 0$  ( $j = \overline{1, n}$ ), то  $X^*$  — точка минимума; если знаки определителей чередуются, начиная с отрицательного, то  $X^*$  — точка максимума.

$$\text{Отметим, что } \Delta_j = \sum_{k=1}^j a_{ik} D_{ik} = \sum_{i=1}^j a_{ik} D_{ik}$$

(разложение по любой  $i$ -й строке ( $i \in \overline{1, j}$ ) или любому  $k$ -му столбцу ( $k \in \overline{1, j}$ )),

$$D_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik},$$

где  $D_{ik}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ik}$ ;  $M_{ik}$  — дополнительный минор, получающийся из определителя  $\Delta_j$  вычеркиванием строки  $i$  и столбца  $k$ .

### Метод Ньютона

В случае, когда точное решение системы уравнений (1.4) найти трудно, применяют приближенные численные методы ее решения. К ним относят метод Ньютона, который обеспечивает быструю сходимость, но имеет трудность выбора начального приближения, гарантирующего сходимость.

Итерационный алгоритм нахождения стационарных точек по методу Ньютона состоит в следующем.

$$1. \text{ Находим } \varphi_i(X) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \quad (i = \overline{1, n}).$$

2. Выбираем начальную точку  $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  и точность решения  $\varepsilon$  (малое положительное число, например  $\varepsilon = 10^{-4}$ ), находим  $f(X^{(0)})$ .

3. Формируем систему уравнений относительно неизвестных  $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  и  $T^{(k)} = (t_1^{(k)}, \dots, t_n^{(k)})$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(X^{(k)})t_1^{(k)} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(X^{(k)})t_2^{(k)} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(X^{(k)})t_n^{(k)} = \\ = -\varphi_1(X^{(k)}), \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(X^{(k)})t_1^{(k)} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}(X^{(k)})t_2^{(k)} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(X^{(k)})t_n^{(k)} = \\ = -\varphi_n(X^{(k)}). \end{cases} \quad (1.5)$$

4. Примем  $k = 0$ .

5. Подставляем значение  $X^{(k)}$  в систему (1.5) уравнений, в результате чего она становится системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $t_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

6. Решая данную систему, определяем  $T^{(k)}$ .

7. Находим  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + T^{(k)}$  (или в координатной форме  $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + t_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1, n}$ )) и  $f(X^{(k+1)})$ .

8. Если  $\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i^{(k)})^2} > \varepsilon$ , тогда примем  $k = k + 1$  и переходим к п. 5, иначе к п. 9.

9. Конец алгоритма.

### Общий алгоритм решения задач безусловной оптимизации с помощью итерационных методов поиска безусловного экстремума

Существует две группы таких итерационных методов:

1) градиентные методы;

2) методы случайного поиска.

Основными в первой группе являются следующие методы:

— градиентного спуска;

— наискорейшего спуска;

— сопряженных градиентов.

Во второй группе выделяют следующие основные методы:

— с возвратом на неудачном шаге;

— наилучшей пробы;

— с обучением.

Общий алгоритм решения задач безусловной оптимизации с помощью итерационных методов состоит в следующем:

1. Выбираем начальное приближение  $X^{(0)}$  и точность решения  $\varepsilon$ , принимаем  $k = 0$ .
2. Определяем направление  $g^{(k)}$  поиска экстремума на итерации  $k$ .
3. Выбираем величину шага  $h^{(k)}$  в направлении поиска.
4. Вычисляем

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + h^{(k)} g^{(k)}. \quad (1.6)$$

5. Рассчитываем  $f(X^{(k+1)})$  и дополнительно для градиентных методов вектор  $\nabla f(X^{(k+1)})$  и его норму  $\|\nabla f(X^{(k+1)})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^{(k+1)})\right)^2}$ .

6. Если выполняется критерий завершения поиска экстремума, то переходим к п. 7, иначе принимаем  $k = k + 1$  и переходим к п. 2.

7. Конец алгоритма.

Критерием завершения поиска экстремума служит:

1) для градиентных методов

$$\|\nabla f(X^{(k+1)})\| \leq \varepsilon; \quad (1.7)$$

2) для методов случайного поиска

$$|f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k-r)})| \leq \varepsilon \quad (r = \overline{0, 1});$$

последний критерий означает, что на протяжении трех итераций значение функции практически не изменяется.

Итерационные методы отличаются между собой тем, как выбираются направление  $g^{(k)}$  и шаг  $h^{(k)}$  поиска экстремума. Особенности этого выбора в шести перечисленных методах будут рассмотрены ниже.

### Метод градиентного спуска

Направление градиента  $\nabla f(X)$  есть направление наиболее быстрого возрастания функции  $f(X)$  в точке  $X$ . Поэтому за направление поиска максимума на итерации  $k$  принимаем

$$g^{(k)} = \nabla f(X^{(k)}), \quad (1.8)$$

а минимума

$$g^{(k)} = -\nabla f(X^{(k)}), \quad (1.9)$$

где  $-\nabla f(X^{(k)})$  называют антиградиентом.

В обоих случаях используем постоянный шаг в направлении поиска экстремума на всех итерациях

$$h^{(k)} = h = \text{const} \quad \text{при любом } k, \quad (1.10)$$

где  $h$  необходимо выбирать достаточно малым положительным числом, чтобы процесс нахождения экстремума сходил.

В общем случае в методе градиентного спуска (с фиксированным шагом  $h$ ) может не обеспечиваться сходимость итерационного процесса нахождения экстремума.

На каждой итерации  $k$  следует проверять выполнение условия:

$$\begin{aligned} f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)}) & \text{ при поиске минимума,} \\ f(X^{(k+1)}) > f(X^{(k)}) & \text{ при поиске максимума.} \end{aligned} \quad (1.11)$$

В противном случае надо уменьшить значение  $h$ , иначе итерационный процесс может быть расходящимся или заикливаться.

В общем случае при невыполнении на  $(k_s + 1)$ -й итерации ( $s = 1, 2, \dots$ ) условия (1.11) выбираем шаг в направлении поиска экстремума на итерации  $k$  следующим образом:

$$h^{(k)} = h = \text{const} \quad \text{при } k = \overline{0, k_1},$$

$$h^{(k)} = h_s = \text{const}(s) \quad \text{при } k = \overline{k_s + 1, k_{s+1}}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где  $h > h_s > h_{s+1}$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и данные константы  $h_s$  выбираются (путем их уменьшения с ростом  $s$ ) так, чтобы выполнялось условие (1.11).

На рис. 1.2 показан пример влияния выбора значения шага  $h^{(k)}$  на сходимость итерационного процесса нахождения минимума функции  $f(x) = \alpha x^2$ ,  $\alpha > 0$ . При  $h = \frac{1}{\alpha}$  происходит заикливание:  $x^{(k+1)} = -x^{(k)}$ ,  $x^{(k+2)} = x^{(k)}$  (рис. 1.2, а). В случае

$h > \frac{1}{\alpha}$  процесс расходится (рис. 1.2, б); при  $h < \frac{1}{\alpha}$  — сходится (рис. 1.2, в).

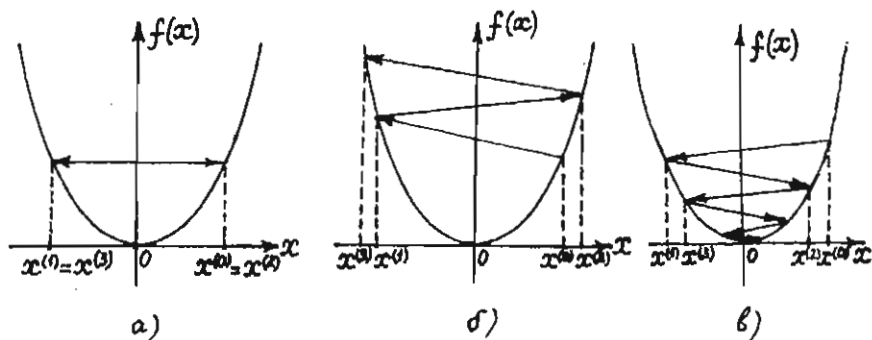


Рис. 1.2

В связи с малостью шага  $h$  данный метод не обеспечивает быстроту сходимости, требуется больше итераций, чем при применении метода Ньютона и метода наискорейшего спуска.

Отметим, что так как в данном методе градиент вычисляется на каждой итерации, то при слишком громоздком выражении для градиента его значение находят по приближенной формуле:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i} = \frac{f(x_1, \dots, x_i + \xi, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\xi}$$

$$(i = \overline{1, n});$$

где  $\xi < h$ .

Рассмотрим геометрический смысл метода градиентного спуска.

Направление градиента и антиградиента функции  $f(X)$  в любой точке перпендикулярно касательной к поверхности (при  $n = 2$  к линии) постоянного уровня функции в этой точке. Такой поверхностью (линией) называется поверхность (линия), на которой значение функции постоянно. На рис. 1.3 изображены линии постоянного уровня функции  $f(x_1, x_2) = c_v$  ( $v = \overline{1, 4}$ , причем  $c_1 > c_2 > c_3 > c_4$ ), выбранная начальная точка  $X^{(0)}$  и полученные в соответствии с методом градиентного спуска первые три точки  $X^{(k)}$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) при по-

иске минимума  $f(X)$ . При этом точки  $X^{(k+1)}$  и  $X^{(k)}$  расположены на расстоянии  $h \|\nabla f(X^{(k)})\|$  друг от друга.

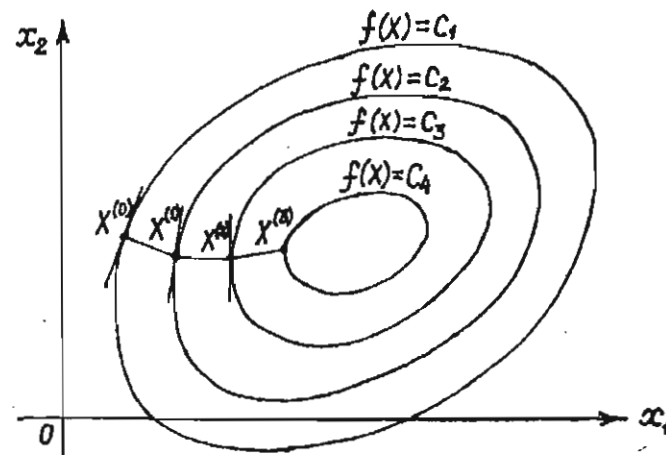


Рис. 1.3

### Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов

Расчетная формула для направления  $g^{(k)}$  поиска экстремума в методе наискорейшего спуска имеет тот же вид (1.8)–(1.9), что и в методе градиентного спуска:

$$g^{(k)} = \pm \nabla f(X^{(k)}),$$

где «+» используют при поиске максимума, «-» при минимуме.

В методе сопряженных градиентов при вычислении направления  $g^{(k)}$  учитывается предыстория поиска экстремума:

$$g^{(k)} = \pm \nabla f(X^{(k)}) + \frac{\|\nabla f(X^{(k)})\|^2}{\|\nabla f(X^{(k-1)})\|^2} g^{(k-1)}, \quad (1.12)$$

где  $g^{(-1)} = 0$ . Отметим, что при  $k = 0$  (1.12) совпадает с формулой для  $g^{(k)}$  в методе наискорейшего спуска.

Сходимость метода сопряженных градиентов по сравнению с методом наискорейшего спуска лучше, однако сложность выполнения действий на каждой итерации выше.

В обоих рассматриваемых методах в отличие от метода градиентного спуска шаг  $h^{(k)}$  в направлении поиска экстремума выбираем оптимальным на каждой итерации  $k$ , т.е.  $h^{(k)} \neq \text{const}$ .

Рассмотрим два способа определения оптимального шага.

### 1. Точный аналитический способ

На каждой итерации  $k$  получаем выражение для  $f(X^{(k+1)})$  в виде функции от  $h^{(k)}$ :  $z(h^{(k)}) = f(X^{(k+1)}) = f(X^{(k)} + h^{(k)} g^{(k)})$ .

Для нахождения оптимального шага  $h^{(k)}$  в направлении поиска экстремума решаем задачу одномерной (так как  $h^{(k)}$  — скаляр) оптимизации:

$$\text{extr}_{h^{(k)}} z(h^{(k)}), \quad (1.13)$$

причем в качестве экстремума будет минимум функции  $z(h^{(k)})$  при поиске минимума функции  $f(X)$  и максимум  $z(h^{(k)})$  — при максимуме  $f(X)$ .

Для решения задачи (1.13) используется классический метод, основанный на необходимом условии экстремума:

$$\frac{dz}{dh^{(k)}}(h^{(k)}) = 0$$

и достаточном условии минимума

$$z^{[2]}(h^{(k)}) > 0$$

и максимума

$$z^{[2]}(h^{(k)}) < 0,$$

где  $z^{[v]}(h^{(k)})$  — производная порядка  $v$  функции  $z$  по  $h^{(k)}$  в точке  $h^{(k)}$ .

Если  $z^{[2]}(h^{(k)}) = 0$ , то исследуются производные более высокого порядка. Достаточным условием экстремума будет четный порядок  $v$  ( $v = 4, 6, \dots$ ) первой встречающейся (наиболее низкого порядка) производной  $z^{[v]}(h^{(k)})$ , не равной нулю, и при  $z^{[v]}(h^{(k)}) > 0$  достигается минимум  $z$  в точке  $h^{(k)}$ , а при  $z^{[v]}(h^{(k)}) < 0$  — максимум.

### 2. Приближенный способ

Это способ нахождения оптимального шага  $h^{(k)}$  путем одвоили многократного деления или умножения шага  $h^{(k-1)}$  на дробное положительное число, в частности, способ половинного деления или умножения шага.

Алгоритм определения на каждой  $k$ -й итерации значений  $h^{(k)}$  и  $X^{(k+1)}$  при поиске минимума  $f(X)$  состоит в следующем.

1. Принимаем  $h^{(k)} = h^{(k-1)}$ .

2. Вычисляем  $X = X^{(k)} + h^{(k)} g^{(k)}$  и определяем  $f(X)$ .

3. Если  $f(X) \geq f(X^{(k)})$ , то  $h^{(k)} = \alpha h^{(k)}$ , где  $0 < \alpha < 1$  (для способа половинного деления или умножения шага принимаем  $\alpha = 0,5$ ).

П. 2 и 3 алгоритма повторяем до тех пор, пока не будет выполнено условие  $f(X) < f(X^{(k)})$ . Тогда примем  $X^{(k+1)} = X$  и переходим на п. 5. (Слишком большой шаг приводит к расходящемуся процессу при поиске экстремума, поэтому шаг уменьшают до того значения, при котором обеспечивается сходимость процесса поиска минимума).

4. Если  $f(X) < f(X^{(k)})$ , то  $h^{(k)} = \frac{h^{(k)}}{\alpha}$ . Запоминаем предыдущее

значение  $X$ :  $X' = X$ . Вычисляем новое значение  $X = X^{(k)} + h^{(k)} g^{(k)}$  и  $f(X)$ .

П. 4 повторяется до тех пор, пока не выполнится условие  $f(X) \geq f(X^{(k)})$ , тогда в качестве  $X^{(k+1)}$  берем предыдущее значение:  $X^{(k+1)} = X'$ . (Слишком маленький шаг приводит к недостаточной скорости сходимости процесса поиска экстремума (большому числу итераций), поэтому шаг увеличивают до тех пор, пока процесс поиска минимума остается сходящимся).

5. Конец алгоритма.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода наискорейшего спуска.

Из точки  $X^{(k)}$  идем в направлении антиградиента в случае поиска минимума  $f(X)$  или градиента при максимуме до точки  $X^{(k+1)}$ , в которой достигается минимальное значение функции в данном направлении. Это направление  $\pm \nabla f(X^{(k)})$  перпендикуляр-



но касательной к поверхности (линии при  $n = 2$ ) постоянного уровня функции в точке  $X^{(k)}$ , а также оно само является касательной к поверхности (линии) постоянного уровня функции  $f(X)$  в точке  $X^{(k+1)}$ . Поэтому перпендикуляр к касательной из точки  $X^{(k)}$  проводим до тех пор, пока он сам не станет касательной к другой линии уровня (в точке  $X^{(k+1)}$ ).

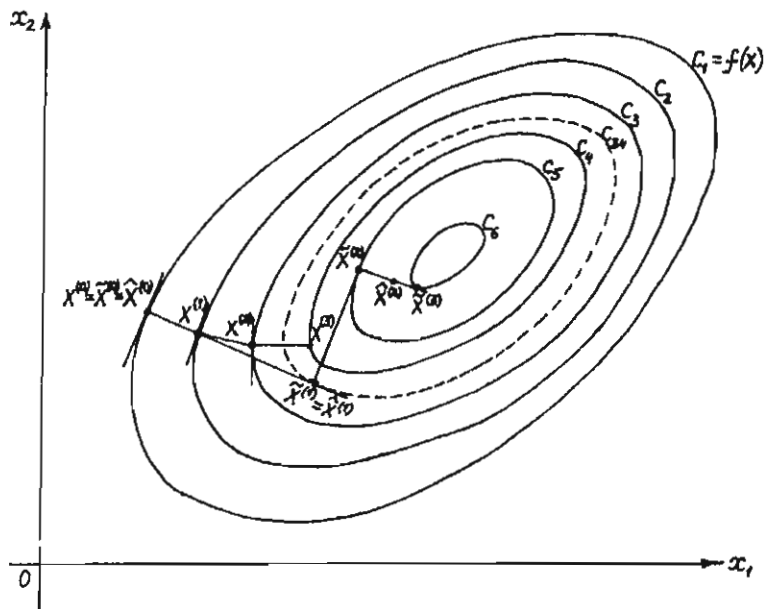


Рис. 1.4

Геометрическая интерпретация метода наискорейшего спуска представлена на рис. 1.4, где изображены линии постоянного уровня функции  $f(x_1, x_2) = c_v$  ( $v = 1, 2, 3, 34, 4, 5, 6$ , причем  $c_1 > c_2 > c_3 > c_{34} > c_4 > c_5 > c_6$ ) и полученные в соответствии с данным методом точки  $\tilde{X}^{(k)}$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) при поиске минимума  $f(X)$ . Для наглядности сравнения градиентных методов на рис. 1.4 показаны также полученные по методу градиентного спуска точки  $X^{(k)}$  ( $k = \overline{1, 3}$ ).

Кроме того, на рис. 1.4 представлена геометрическая интерпретация метода сопряженных градиентов. В данном методе по

сравнению с методом наискорейшего спуска траектория поиска экстремума, проходящая последовательно через точки  $\tilde{X}^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), сглаживается. Точка  $\tilde{X}^{(2)}$  находится между  $\tilde{X}^{(1)}$  и  $\tilde{X}^{(3)}$ . Отметим, что в связи с выражением  $\tilde{X}^{(1)} = \tilde{X}^{(0)} + h^{(0)} g^{(0)}$ , выбором одной и той же начальной точки для трех градиентных методов  $\tilde{X}^{(0)} = \tilde{X}^{(0)} = X^{(0)}$  и совпадением формул для  $g^{(k)}$  и  $h^{(k)}$  при  $k = 0$  в методах наискорейшего спуска и сопряженных градиентов, получаем совпадение в обоих методах точек на первой итерации  $\tilde{X}^{(1)} = \tilde{X}^{(1)} \neq X^{(1)}$ .

### Методы случайного поиска

Если целевая функция такова, что затруднено или невозможно нахождение ее производных, или они имеют слишком громоздкий вид, то применяют методы случайного поиска. В этом случае потребуется большее число итераций, но сама итерация будет проще: без вычисления производных. Данные методы являются итерационными, и укрупненный алгоритм решения задач безусловной оптимизации в соответствии с ними приведен на с. 12.

В методах случайного поиска шаг  $h^{(k)}$  обычно задается постоянным. Однако возможны модификации методов, в которых используется приближенный способ нахождения оптимального шага  $h^{(k)}$  на каждой итерации, описанный при рассмотрении методов наискорейшего спуска и сопряженных градиентов. Направление  $g^{(k)}$  поиска экстремума является полностью или частично случайным. Существует много методов случайного поиска, отличающихся тем, как выбирается направление  $g^{(k)}$ .

Рассмотрим особенности нахождения  $g^{(k)}$  и  $X^{(k+1)}$  в трех основных методах случайного поиска.

#### 1. Метод с возвратом на неудачном шаге

Алгоритм нахождения  $g^{(k)}$  и  $X^{(k+1)}$  на каждой итерации  $k$  состоит в следующем.

1. Генерируем случайное направление  $R^{(k)}$  в  $n$ -мерном пространстве, т.е. случайный вектор  $R^{(k)} = (r_1^{(k)}, \dots, r_n^{(k)})$ , где  $r_i^{(k)}$  — случайная величина с известным законом распределения (для простоты часто используют равномерное распределение на отрезке  $[-1, 1]$ ).

2. Примем  $g^{(k)} = R^{(k)}$  и вычислим  $X = X^{(k)} + h^{(k)} g^{(k)}$ .

3. Если  $f(X) \geq f(X^{(k)})$  в случае поиска минимума  $f(X)$  (или  $f(X) \leq f(X^{(k)})$  при максимуме), то переходим к п. 1, иначе  $X^{(k+1)} = X$ .

4. Конец алгоритма.

### 2. Метод наилучшей пробы

Алгоритм нахождения  $g^{(k)}$  и  $X^{(k+1)}$  на каждой итерации  $k$  состоит в следующем.

1. Генерируем  $s$  случайных направлений  $R_1^{(k)}, \dots, R_s^{(k)}$ ; находим соответствующие им  $s$  значений векторов  $X_\nu = X^{(k)} + h^{(k)} R_\nu^{(k)}$  ( $\nu = \overline{1, s}$ ) и  $s$  значений  $f(X_\nu)$  функции  $f(X)$  в этих точках  $X_\nu$ .

2. В случае поиска минимума функции  $f(X)$  выберем то  $R_\nu^{(k)}$ , которое соответствует минимальному значению  $f(X_\nu)$  среди значений  $f(X_\nu)$ , т.е. при  $f(X_\nu) = \min_{\nu=\overline{1, s}} f(X_\nu)$  примем  $g^{(k)} = R_\nu^{(k)}$  и  $X = X_\nu$ ;

в случае поиска максимума функции  $f(X)$  при  $f(X_\nu) = \max_{\nu=\overline{1, s}} f(X_\nu)$  примем  $g^{(k)} = R_\nu^{(k)}$  и  $X = X_\nu$ .

3. Если  $f(X) \geq f(X^{(k)})$  при поиске минимума  $f(X)$  (или  $f(X) \leq f(X^{(k)})$  при максимуме), то переходим к п. 1, иначе  $X^{(k+1)} = X$ .

4. Конец алгоритма.

### 3. Метод с обучением

В отличие от первых двух методов без обучения в данном методе учитывается опыт выбора удачного направления поиска экстремума на двух предыдущих итерациях.

Алгоритм нахождения  $g^{(k)}$  и  $X^{(k+1)}$  на  $k$ -й итерации состоит в следующем.

1. Вычисляем

$$g^{(k)} = \frac{R^{(k)} + W^{(k)}}{\|R^{(k)} + W^{(k)}\|},$$

где  $R^{(k)}$  — случайный вектор с известной функцией распределения (часто используют равномерное распределение на отрезке  $[-1, 1]$ );  $W^{(k)}$  — детерминированный вектор, определяемый по формуле:

$$W^{(k)} = \beta W^{(k-1)} \pm \delta \operatorname{sgn} \left( f(X^{(k)}) - f(X^{(k-1)}) \right) (X^{(k)} - X^{(k-1)})$$

с использованием знака «+» при  $\delta$  в случае поиска максимума функции  $f(X)$  и «-» при минимуме  $f(X)$ ;  $\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y > 0, \\ -1 & \text{при } y < 0, \\ 0 & \text{при } y = 0; \end{cases}$

$W^{(0)} = 0$ ;  $\beta$  — параметр запоминания;  $\delta$  — параметр обучения,  $\beta$  и  $\delta$  — малые положительные величины, которыми регулируют степень детерминированности и случайности направления  $g^{(k)}$  поиска экстремума.

2. Находим  $X = X^{(k)} + h^{(k)} g^{(k)}$ .

3. Если  $f(X) \geq f(X^{(k)})$  при поиске минимума  $f(X)$  (или  $f(X) \leq f(X^{(k)})$  при максимуме), то переходим к п. 1, иначе  $X^{(k+1)} = X$ .

4. Конец алгоритма.

### ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ

Для каждого номера варианта  $N = \overline{1, 20}$  в табл. 1.1 задана целевая функция  $f(X)$  в задаче безусловной оптимизации  $\operatorname{extr} f(X)$ .

Таблица 1.1

Номер варианта $N$	Целевая функция $f(X)$
1	$x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 - 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3$
2	$x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 8$
3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_1x_2 + 6x_1 - 3x_3 + 9$

Номер варианта $N$	Целевая функция $f(X)$
4	$2x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 - 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5$
5	$x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 - 3x_1 + 9x_2 + 1$
6	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 7$
7	$x_1^3 + 2x_2^2 + x_3^2 - 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 2$
8	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_1x_2 + 9x_2 - 3x_3 + 33$
9	$x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2$
10	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 1$
11	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_1x_2 + 3x_2 - 3x_3 + 3$
12	$x_1^2 + x_2^3 + 3x_3^2 + x_1x_3 - 3x_2 - 4$
13	$x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 + x_1x_3 + 6x_1 - 3x_2 + 1$
14	$x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 3$
15	$3x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_1x_2 - 3x_3 - 5$
16	$x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 + x_1x_3 + 9x_1 - 3x_2 + 30$
17	$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^3 - 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 7$
18	$x_1^3 + 3x_2^2 + x_3^2 - 3x_1 + x_2x_3 + 3$
19	$3x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 + x_1x_3 - 3x_2 + 15$
20	$x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2$

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Для Вашего варианта задания необходимо:

1. Найти решение задачи безусловной оптимизации функции  $f(X)$  с помощью следующих методов: 1) классического; 2) Ньютона; 3) градиентного спуска при заданном  $h = 0,2$ ; 4) наискорейшего спуска.

В трех итерационных методах выполнить вручную только по одной итерации, используя одинаковое значение  $X^{(0)}$ , компоненты которого должны отличаться от найденного по классическому методу экстремума на  $+1$ .

2. Провести сравнительный анализ полученных на первой итерации результатов решения заданной задачи безусловной оптимизации функции с помощью трех итерационных методов, сформулировать выводы и показать полученные результаты преподавателю.

3. Выполнить на ЭВМ расчет безусловного экстремума функции  $f(X)$  с точностью  $\epsilon = 10^{-4}$  согласно методам: Ньютона и трем градиентным, включая метод сопряженных градиентов.

4. Выполнить сравнительный анализ результатов решения одной и той же задачи безусловной оптимизации функции с помощью пяти используемых в работе методов и сформулировать выводы.

## ПРИМЕР

Пусть номер варианта задания  $N = 20$ . Тогда задана следующая задача безусловной оптимизации:

$$\text{extr}_X f(X),$$

где  $f(X) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2$ .

Вначале найдем решение данной задачи по классическому методу.

Согласно необходимому условию экстремума функции  $f(X)$  получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X) = 3x_1^2 - 3 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X) = 2x_2 + x_3 + 6 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(X) = 2x_3 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, находим  $x_1 = \pm 1$ ,  $x_2 = -4$ ,  $x_3 = 2$ , т.е. получили две стационарные точки:  $X_1 = (1; -4; 2)$ ,  $X_2 = (-1; -4; 2)$ .

Проверяем выполнение достаточного условия в  $X_1$  и  $X_2$ . Для этого находим определители третьего, второго и первого порядков матрицы Гессе  $A(X) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (X) \right]$ :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6x_1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 18x_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12x_1, \quad \Delta_1 = 6x_1.$$

Получаем  $\Delta_i(X_1) > 0$ ,  $\Delta_i(X_2) < 0$  ( $i = \overline{1, 3}$ ), поэтому  $X_1$  — точка минимума, а  $X_2$  — точка перегиба (стационарная точка, не являющаяся ни точкой минимума, ни точкой максимума). При этом  $f(X_1) = -12$ ,  $f(X_2) = -8$ .

Далее для изучения других методов решения задач безусловной оптимизации функции согласно порядку выполнения лабораторной работы выполняем вручную по одной итерации в решении заданной задачи с помощью трех итерационных методов: Ньютона, градиентного спуска при заданном  $h = 0,2$  и наискорейшего спуска. При этом начальную точку  $X^{(0)}$  выбираем исходя из полученной классическим методом точки минимума  $X^* = X_1 = (1; -4; 2)$ , тогда  $X^{(0)} = (2; -3; 3)$ .

Применим метод Ньютона для поиска стационарных точек.

Для заданной функции

$$f(X) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2$$

находим

$$\varphi_1(X) = 3x_1^2 - 3, \quad \varphi_2(X) = 2x_2 + x_3 + 6, \quad \varphi_3(X) = 2x_3 + x_2.$$

Выбираем  $X^{(0)} = (2; -3; 3)$  и  $\varepsilon = 10^{-4}$ , находим

$$f(X^{(0)}) = -5.$$

Формируем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1^{(k)} t_1^{(k)} + 0 t_2^{(k)} + 0 t_3^{(k)} = -3(x_1^{(k)})^2 + 3, \\ 0 t_1^{(k)} + 2 t_2^{(k)} + 1 t_3^{(k)} = -2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 6, \\ 0 t_1^{(k)} + 1 t_2^{(k)} + 2 t_3^{(k)} = -2x_3^{(k)} - x_2^{(k)}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Примем  $k = 0$ . Подставляем в систему уравнений (1.14) значение  $X^{(0)}$ , тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 4 t_1^{(0)} = -3, \\ 2 t_2^{(0)} + t_3^{(0)} = -3, \\ t_2^{(0)} + 2 t_3^{(0)} = -3. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получим

$$T^{(0)} = (-0,75; -1; -1).$$

Поэтому

$$X^{(1)} = X^{(0)} + T^{(0)} = (1,25; -4; 2), \quad f(X^{(1)}) = -11,7969.$$

Выполнив аналогичные действия на ЭВМ, при  $k = 1$  получим  $T^{(1)} = (-0,225; 0; 0)$ ,  $X^{(2)} = (1,025; -4; 2)$ ,  $f(X^{(2)}) = -11,9981$  и т.д. вплоть до выполнения условия  $\sqrt{\sum_{i=1}^3 (t_i^{(k)})^2} \leq \varepsilon$  при  $k = 4$ .

Теперь применим метод градиентного спуска для нахождения минимума заданной функции

$$f(X) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2.$$

Выбираем  $X^{(0)} = (2; -3; 3)$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$  и  $h^{(k)} = h = 0,2$  для любого  $k$ .

$$\text{Находим } \nabla f(X) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3 \\ 2x_2 + x_3 + 6 \\ 2x_3 + x_2 \end{pmatrix}.$$

При  $k = 0$  получим

$$\nabla f(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3(x_1^{(0)})^2 - 3 \\ 2x_2^{(0)} + x_3^{(0)} + 6 \\ 2x_3^{(0)} + x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\|\nabla f(X^{(0)})\| = 9,9499, \quad f(X^{(0)}) = -5.$$

Согласно итерационной формуле для поиска минимума (см. (1.6), (1.9) и (1.10))

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - h \nabla f(X^{(k)})$$

определяем  $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - 0,2 \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -3,6 \\ 2,4 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$\nabla f(X^{(1)}) = \begin{pmatrix} -2,88 \\ 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix},$$

$$\|\nabla f(X^{(1)})\| = 3,3428, \quad f(X^{(1)}) = -10,1120.$$

Выполнив аналогичные действия на ЭВМ, получим

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,776 \\ -3,84 \\ -2,16 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(X^{(2)}) = \begin{pmatrix} -1,1935 \\ 0,48 \\ 0,48 \end{pmatrix},$$

$$\|\nabla f(X^{(2)})\| = 1,3730, \quad f(X^{(2)}) = -11,7839$$

и т.д. вплоть до выполнения условия (1.7) на итерации  $k = 12$ .

Применим также методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов для поиска минимума заданной функции

$$f(X) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2.$$

Выбираем  $X^{(0)} = (2; -3; 3)$  и  $\epsilon = 10^{-4}$ .

$$\text{Находим } \nabla f(X) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3 \\ 2x_2 + x_3 + 6 \\ 2x_3 + x_2 \end{pmatrix}.$$

На итерации  $k = 0$ , т.е. при нахождении  $X^{(1)}$ , оба метода совпадают:  $X^{(1)} = X^{(0)} - h^{(0)} \nabla f(X^{(0)})$ .

Получаем

$$\nabla f(X^{(0)}) = (9; 3; 3), \quad \|\nabla f(X^{(0)})\| = 9,9499, \quad f(X^{(0)}) = -5.$$

Для определения оптимального шага  $h^{(0)}$  в направлении поиска минимума находим

$$z(h^{(0)}) = f(X^{(1)}) = f(X^{(0)} - h^{(0)} \nabla f(X^{(0)})) =$$

$$= f \begin{pmatrix} 2 - 9h^{(0)} \\ -3 - 3h^{(0)} \\ 3 - 3h^{(0)} \end{pmatrix} = (2 - 9h^{(0)})^3 + (-3 - 3h^{(0)})^2 + (3 - 3h^{(0)})^2 +$$

$$+ (-3 - 3h^{(0)})(3 - 3h^{(0)}) - 3(2 - 9h^{(0)}) + 6(-3 - 3h^{(0)}) + 2.$$

Согласно необходимому условию экстремума функции  $z(h^{(0)})$  приравниваем к нулю ее первую производную:

$$z^{[1]}(h^{(0)}) = -27(2 - 9h^{(0)})^2 + 18(1 - h^{(0)}) -$$

$$- 18(1 - h^{(0)}) - 9(1 - h^{(0)}) + 9(1 + h^{(0)}) + 27 - 18 = 0.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение относительно  $h^{(0)}$ :

$$-2187(h^{(0)})^2 + 1026h^{(0)} - 99 = 0,$$

решая которое находим

$$h^{(0)} = 0,1358 \quad \text{и} \quad \tilde{h}^{(0)} = 0,3333.$$

Проверяем в этих двух точках выполнение достаточного условия минимума функции  $z(h^{(0)})$ , так как определяем минимум функции  $f(X)$ . Для этого находим вторую производную функции  $z(h^{(0)})$ :  $z^{[2]}(h^{(0)}) = -4374h^{(0)} + 1026$ . Отсюда получаем  $z^{[2]}(h^{(0)}) = 432,011 > 0$ ,  $z^{[2]}(\tilde{h}^{(0)}) = -431,854 < 0$ . Поэтому в качестве оптимального шага выбираем  $h^{(0)} = 0,1358$ .

Тогда определяем

$$X^{(1)} = X^{(0)} - h^{(0)} \nabla f(X^{(0)}) = (0,7778; -3,4074; 2,5926),$$

$$\nabla f(X^{(1)}) = (-1,1852; 1,7778; 1,7778),$$

$$\| \nabla f(X^{(1)}) \| = 2,7795 \quad \text{и} \quad f(X^{(1)}) = -10,8093.$$

Данные значения, полученные на итерации  $k=0$ , совпадают для обоих рассматриваемых методов: наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

Согласно порядку выполнения данной лабораторной работы на этом завершаем решение вручную заданной задачи безусловной оптимизации и далее выполняем расчет экстремума на ЭВМ. Однако для изучения методов наискорейшего спуска и сопряженных градиентов продолжим рассмотрение примера.

На итерации  $k=1$  при использовании метода наискорейшего спуска для определения оптимального шага  $h^{(1)}$  в направлении поиска минимума находим

$$\begin{aligned} z(h^{(1)}) &= f(X^{(2)}) = f(X^{(1)} - h^{(1)} \nabla f(X^{(1)})) = \\ &= f \begin{pmatrix} 0,7778 + h^{(1)} \cdot 1,1852 \\ -3,4074 - h^{(1)} \cdot 1,7778 \\ 2,5926 - h^{(1)} \cdot 1,7778 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решая задачу  $\min_{h^{(1)}} z(h^{(1)})$ , получаем  $h^{(1)} = 0,2867$ . Тогда определяем

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= X^{(1)} - h^{(1)} \nabla f(X^{(1)}) = (1,1175; -3,9170; 2,0830), \\ \nabla f(X^{(2)}) &= (0,7466; 0,2489; 0,2489), \\ \| \nabla f(X^{(2)}) \| &= 0,8254 \quad \text{и} \quad f(X^{(2)}) = -11,9363. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить  $X^{(3)}$  и т.д. вплоть до выполнения условия (1.7) при  $k=9$ , как показывает расчет на ЭВМ.

При применении метода сопряженных градиентов для определения оптимального шага  $h^{(1)}$  находим

$$\begin{aligned} z(h^{(1)}) &= f(X^{(2)}) = \\ &= f \left( X^{(1)} - h^{(1)} \left( \nabla f(X^{(1)}) + \frac{\| \nabla f(X^{(1)}) \|^2}{\| \nabla f(X^{(0)}) \|^2} \nabla f(X^{(0)}) \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f \begin{pmatrix} 0,7778 - h^{(1)} (-1,1852 + 0,07804 \cdot 9) \\ -3,4074 - h^{(1)} (1,7778 + 0,07804 \cdot 3) \\ 2,5926 - h^{(1)} (1,7778 + 0,07804 \cdot 3) \end{pmatrix} = \\ &= f \begin{pmatrix} 0,7778 + h^{(1)} \cdot 0,4828 \\ -3,4074 - h^{(1)} \cdot 2,0119 \\ 2,5926 - h^{(1)} \cdot 2,0119 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решая задачу  $\min_{h^{(1)}} z(h^{(1)})$ , получаем  $h^{(1)} = 0,30324$ .

Тогда определяем

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= X^{(1)} - h^{(1)} \begin{pmatrix} -0,4828 \\ 2,0119 \\ 2,0119 \end{pmatrix} = (0,9242; -4,0175; 1,9825), \\ \nabla f(X^{(2)}) &= (-0,4376; -0,0525; -0,0525), \\ \| \nabla f(X^{(2)}) \| &= 0,4438 \quad \text{и} \quad f(X^{(2)}) = -11,9823. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить  $X^{(3)}$  и т.д. вплоть до выполнения условия (1.7) при  $k=7$ , как показывает расчет на ЭВМ.

Отметим, что при применении обоих методов получены результаты:

$$\| \nabla f(X^{(0)}) \| > \| \nabla f(X^{(1)}) \| > \| \nabla f(X^{(2)}) \| \quad \text{и} \\ f(X^{(0)}) > f(X^{(1)}) > f(X^{(2)}),$$

которые и должны были иметь место при решении задачи поиска минимума любой дифференцируемой непостоянной функции  $f(X)$ . Кроме того, в точке  $X^{(2)}$ , найденной по методу сопряженных градиентов, значения нормы градиента и функции меньше, чем в точке  $X^{(2)}$ , полученной по методу наискорейшего спуска, что демонстрирует лучшую сходимость первого метода по сравнению со вторым. Аналогично из сравнения результатов решения задачи с помощью методов наискорейшего и градиентного спусков следует, что в каждой точке  $X^{(1)}$  и  $X^{(2)}$  значения нормы градиента и функции меньше при использовании метода наискорейшего спуска, чем метода градиентного спуска, что свидетельствует о лучшейходимости первого метода по сравнению со вторым.

## СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Наименование работы.
2. Цель работы.
3. Решаемая задача согласно Вашему варианту задания.
4. Решение задачи безусловной оптимизации функции с помощью классического метода и выполнение первой итерации при решении задачи согласно каждому из трех итерационных методов: Ньютона, градиентного и наискорейшего спусков.
5. Полученные на ЭВМ результаты решения с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$  задачи безусловной оптимизации функции на всех итерациях с помощью итерационных методов: Ньютона, градиентного и наискорейшего спусков, сопряженных градиентов.
6. Выводы на основе сравнительного анализа результатов решения одной и той же задачи безусловной оптимизации функции с помощью пяти методов.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Сформулируйте необходимые и достаточные условия безусловного экстремума функции.
2. В чем состоит метод Ньютона и что он позволяет найти?
3. Опишите три градиентных метода, их геометрический смысл и сравните методы между собой.
4. Найдите решение заданной преподавателем задачи безусловной оптимизации функции с помощью классического метода и трех градиентных, выполнив в них две итерации.
5. Опишите методы случайного поиска и сравните их с градиентными.

## Работа 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

**Цель работы:** изучить и практически овладеть основными методами решения задач условной оптимизации.

### ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

#### Методы решения задач условной оптимизации при ограничениях типа равенств

Эти методы применяют для решения задач нелинейного программирования.

Решаемая задача условной оптимизации функции  $f(X)$  при наличии ограничений типа равенств имеет следующий вид: в векторной форме

$$\begin{cases} \text{extr } f(X), \\ X \\ \Phi(X) = 0 \end{cases}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} \text{extr } f(x_1, \dots, x_n), \\ x_1, \dots, x_n \\ \varphi_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (j = \overline{1, m}, m < n). \end{cases} \quad (2.1)$$

Методы решения этой задачи основаны на сведении ее к задаче безусловной оптимизации и применении уже рассмотренных методов решения таких задач.

#### 1. Метод непосредственного исключения

Решая  $m$  уравнений (2.2), находим  $m$  входящих в них переменных  $x_i$  ( $i = \overline{n-m+1, n}$ ) в виде  $m$  функций от остальных  $n-m$  переменных  $x_i$  ( $i = \overline{1, n-m}$ ). Подставляем полученные функции в выражение для  $f(X)$ , в результате чего задача (2.1)–(2.2) сводится к задаче безусловной оптимизации функции  $f(x_1, \dots, x_{n-m})$

$$\text{extr}_{x_1, \dots, x_{n-m}} f(x_1, \dots, x_{n-m}).$$

Данный метод не очень удобен в применении, поэтому используется редко.

#### 2. Метод штрафных функций

Это грубый метод с недостаточно хорошей сходимостью, но простой. Он применяется для нахождения первоначального приближения  $X^{(0)}$ , а затем используют более точные методы. Согласно методу штрафных функций задача (2.1)–(2.2) условной оптимизации функции  $f(X)$  сводится к задаче безусловной оптимизации вспомогательной функции:

$$q(X) = f(X) + \omega(X),$$

где  $\omega(X)$  — штрафная функция. Ее выбирают таким образом, чтобы при выполнении ограничений (2.2) она обращалась в нуль, иначе (достаточно невыполнения  $\varphi_j(X) = 0$  хотя бы при одном  $j$ ) резко возрастала. Поэтому в качестве  $\omega(X)$  можно взять следующую функцию:

$$\omega(X) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi_j^2(X),$$

где  $\alpha_j$  — достаточно большие положительные константы при поиске минимума функции  $f(X)$  и отрицательные — при максимуме.

### 3. Метод множителей Лагранжа

В данном точном методе задача (2.1)–(2.2) условной оптимизации функции  $f(X)$  сводится к задаче безусловной оптимизации функции Лагранжа, имеющей вид:

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(X),$$

где  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  — вектор множителей Лагранжа. Полученную задачу безусловной оптимизации решаем с помощью классического метода, основанного на необходимом и достаточном условиях экстремума.

Находим необходимое условие экстремума функции  $L(X, \Lambda)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(X, \Lambda) = 0 & (i = \overline{1, n}) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(X, \Lambda) = 0 & (j = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(X) = 0 & (i = \overline{1, n}), \\ \varphi_j(X) = 0 & (j = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим значения  $X$  и  $\Lambda$ , которые удовлетворяют данной системе. Найденные точки (или точ-

ка)  $X$  являются стационарными, и в них необходимо проверить выполнение достаточного условия экстремума.

Достаточное условие минимума функции  $L(X, \Lambda)$  по  $X$  точке  $X^*$  — это положительная определенность в данной точке  $X^*$  той части размером  $n \times n$  матрицы Гессе функции  $L(X, \Lambda)$ , которая соответствует вторым частным производным от  $L(X, \Lambda)$  по  $X$  (не по  $\Lambda$ ):

$$G(X^*, \Lambda(X^*)) = \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_k}(X^*, \Lambda(X^*)) \right].$$

Обозначение  $\Lambda(X^*)$  введено для указания зависимости значения  $\Lambda$  от значения  $X^*$ . Достаточное условие  $\max_X L(X, \Lambda)$  в точ-

ке  $X^*$  — отрицательная определенность  $G(X^*, \Lambda(X^*))$ .

Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода множителей Лагранжа.

Пусть  $n = 2$ ,  $m = 1$ . На рис. 2.1 изобразим линии постоянного уровня функции  $f(x_1, x_2) = c_v$  ( $v = \overline{1, 3}$ , причем  $c_1 > c_2 > c_3$ ) и кривую ограничения  $\varphi(x_1, x_2) = 0$ . Имеется три точки касания кривой ограничения с линиями постоянного уровня:  $X_1^*$ ,  $X_2^*$  и  $X_3^*$ .

Точки экстремума обязательно лежат на кривой ограничения и являются точками касания этой кривой с линиями постоянного уровня. Напомним, что точка  $X^*$  называется локальным миниму-

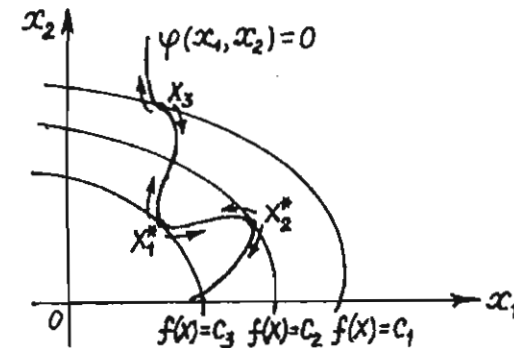


Рис. 2.1



мом функции  $f(X)$ , если существует такая  $\varepsilon$ -окрестность этой точки, что для любой точки  $X$  данной окрестности выполняется условие  $f(X) \leq f(X^*)$ . При минимуме  $f(X) \geq f(X^*)$ . Для глобального экстремума указанные условия должны выполняться для любой точки  $X$  области допустимых значений.

Отсюда следует, что если при движении вдоль кривой ограничения в двух разных направлениях из точки касания данной кривой с линией постоянного уровня значение функции в  $\varepsilon$ -окрестности точки касания не будет возрастать по сравнению со значением функции в точке касания, то данная точка является локальным максимумом. Если же значение функции  $f(X)$  не будет убывать, то точка касания — локальный минимум. Локальный максимум (минимум) будет одновременно и глобальным, если значение функции в любой точке кривой ограничения меньше (соответственно больше) или равно значению функции в точке касания. Если при движении из точки касания линии постоянного уровня с кривой ограничения вдоль этой кривой в одном направлении функция  $f(X)$  возрастает, а в другом — убывает, то точка касания является точкой перегиба (стационарной точкой, но не экстремумом).

На рис. 2.1 имеем точки локального минимума  $X_1^*$  и локального максимума  $X_2^*$ , а также точку перегиба  $X_3$ .

Если необходимые условия экстремума функции  $L(X, \Lambda)$  дают сложную систему уравнений, то используем следующий метод.

#### 4. Метод поиска седловой точки функции Лагранжа

При нахождении минимума функции  $f(X)$  функция Лагранжа  $L(X, \Lambda)$  имеет в точке  $(X^*, \Lambda^*)$  седловую точку, если выполняется неравенство:

$$L(X, \Lambda^*) \geq L(X^*, \Lambda^*) \geq L(X^*, \Lambda)$$

или, что тоже самое:

$$L(X^*, \Lambda^*) = \min_X \max_{\Lambda} L(X, \Lambda) = \max_{\Lambda} \min_X L(X, \Lambda).$$

В методе поиска седловой точки функции Лагранжа задача условной минимизации функции  $f(X)$  при наличии ограничений (2.2) сводится к нахождению седловой точки функции Лагранжа  $L(X, \Lambda)$ .

Из определения седловой точки следует, что в ней достигается минимум функции Лагранжа по  $X$  и максимум по  $\Lambda$ . Поэтому можно применять для функции Лагранжа  $L(X, \Lambda)$  итерационные методы решения задач безусловной оптимизации функции, рассмотренные в первой лабораторной работе.

Например, расчетные формулы поиска минимума функции  $f(X)$  согласно методу градиентного спуска будут следующими:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - h^{(k)} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} (X^{(k)}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^{(k)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} (X^{(k)}) \right]$$

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)} + h^{(k)} \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j (X^{(k)}) \right)}{\partial \lambda_j} = \lambda_j^{(k)} + h^{(k)} \varphi_j (X^{(k)})$$

( $i = \overline{1, n}$ ),  
( $i = \overline{1, m}$ ).

#### 5. Метод проекции градиента

Для решения задачи (2.1)–(2.2) условной оптимизации функции  $f(X)$  при наличии ограничений (2.2) нельзя непосредственно использовать метод градиентного спуска, так как не всякая полученная по этому методу точка  $X^{(k+1)}$  будет удовлетворять данным ограничениям (2.2), т.е. условию  $\Phi(X^{(k+1)}) = 0$ . Поэтому для учета этого условия в методе проекции градиента на каждой итерации  $k$  вначале определяем по  $X^{(k)}$  точку  $X'$  согласно методу градиентного спуска:

$$X' = X^{(k)} \pm h \nabla f(X^{(k)}) \quad (2.3)$$

(знак «+» используем при поиске максимума функции  $f(X)$  и «-» при минимуме), а затем находим проекцию  $X^{(k+1)}$  точки  $X'$  на поверхность  $\Phi(X) = 0$  (а более точно, на гиперплоскость  $U^{(k+1)}$ , являющуюся аппроксимацией поверхности  $\Phi(X) = 0$  при условии, что  $\Phi(X^{(k+1)}) = 0$ ).

Геометрическая интерпретация метода проекции градиента представлена на рис. 2.2, где при  $n = 2$  и  $m = 1$  изображены

точки  $X^{(k)}$ ,  $X'$  и  $X^{(k+1)}$ , кривая ограничения  $\varphi(X) = 0$  (частный случай при  $n = 2$  и  $m = 1$  поверхности ограничений  $\Phi(X) = 0$ ), прямая  $U^{(k+1)}$  (частный случай гиперплоскости  $U^{(k+1)}$ ), векторы  $P$  и  $\Delta X$ , связанные с  $X^{(k+1)}$ ,  $X'$  и  $X^{(k)}$  следующим соотношением:

$$X^{(k+1)} = X' + P = X^{(k)} + \Delta X. \quad (2.4)$$

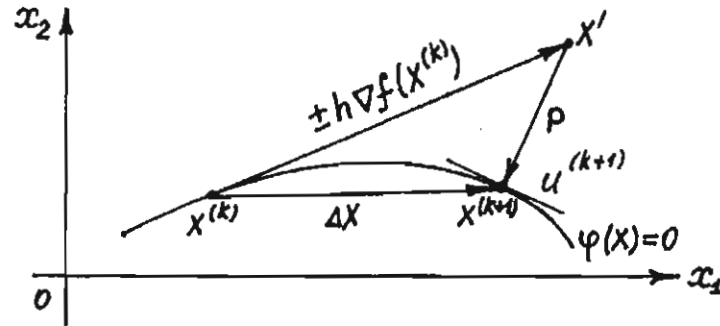


Рис. 2.2

Итак, согласно (2.4) и (2.3) задача нахождения точки  $X^{(k+1)}$  сводится к поиску вектора  $P$  или вектора  $\Delta X$ .

Проекцией точки  $X'$  на множество  $U^{(k+1)}$  называется точка  $X^{(k+1)}$ , для которой

$$\|X^{(k+1)} - X'\| = \min_{X \in U^{(k+1)}} \|X - X'\| = \begin{cases} \min_P \|P\|, \\ \Phi(X^{(k+1)}) = 0. \end{cases}$$

В результате решения приведенной задачи условной минимизации по нахождению  $P$  с помощью метода множителей Лагранжа получено выражение для определения  $P$ , а по нему согласно (2.3)–(2.4) выражение для  $\Delta X$ . Тогда алгоритм решения исходной задачи (2.1)–(2.2) условной оптимизации функции  $f(X)$  при наличии ограничений типа равенств по методу проекции градиента состоит в следующем.

1. Принимаем  $k = 0$ . Выбираем начальное приближение  $X(0)$ , точность решения  $\epsilon$  и шаг  $h$  в направлении поиска безусловного экстремума.

2. Определяем в точке  $X^{(k)}$  градиент  $\nabla f(X^{(k)})$ , вектор  $\Phi(X^{(k)})$  функций из ограничений (2.2) и матрицу  $A = [a_{ji}]$  первых частных производных

$$a_{ji} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(X^{(k)}) \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}).$$

3. Вычисляем матрицу

$$B = A^T \begin{pmatrix} A \times A^T \\ n \times m \quad n \times m \quad m \times n \quad n \times m \end{pmatrix}^{-1}$$

и вектор

$$\Delta X = h \begin{pmatrix} B \times A^T \pm E \\ n \times 1 \quad n \times m \quad m \times n \quad n \times n \end{pmatrix} \nabla f(X^{(k)}) - B \times \Phi(X^{(k)}),$$

где под матрицами и векторами указаны их размерности; знак «+» при  $E$  используем при поиске максимума функции  $f(X)$  и «-» при минимуме;  $A^T = [a_{ij}]$  — матрица, полученная транспонированием матрицы  $A = [a_{ji}]$ ;  $E = [e_{ik}]$  — единичная матрица размером  $n \times n$  ( $e_{ii} = 1$ ,  $e_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ ).

4. Определяем  $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X$ .

5. Проверяем условие завершения итерационного процесса поиска экстремума  $|f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k-r)})| \leq \epsilon$  ( $r = \overline{0, 1}$ ). Если условие выполняется, то переходим к п. 6, иначе принимаем  $k = k + 1$  и переходим к п. 2.

6. Конец алгоритма.

Отметим, что каждый элемент  $\tilde{s}_{jk}$  обратной матрицы  $S^{-1}$  (где  $S = [s_{jk}]$  — квадратная матрица с ненулевым определителем  $\det S$ ) образуется как алгебраическое дополнение  $D_{kj}$  элемента  $s_{kj}$  в определителе  $\det S$ , деленное на сам определитель:

$$S^{-1} = [\tilde{s}_{jk}] = [s_{jk}]^{-1} = \left[ \frac{D_{kj}}{\det S} \right].$$

**Методы решения задач условной оптимизации при ограничениях типа неравенств**

Эти методы применяют для решения задач нелинейного программирования.

Решаемая задача условной оптимизации функции  $f(X)$  при ограничениях типа неравенств имеет следующий вид: в векторной форме

$$\begin{cases} \text{extr } f(X), \\ X \in XD \\ XD = \{X \mid \Psi(X) \leq 0\} \end{cases} \quad (2.5)$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} \text{extr } f(x_1, \dots, x_n), \\ x_1, \dots, x_n \\ \Psi_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad (j = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (2.6)$$

Соотношение между  $m$  и  $n$  может быть любым.

Если условие задано в виде  $\psi_j(X) \geq 0$ , то, умножая обе части данного неравенства на  $-1$ , переходим к неравенству типа (2.6) со знаком « $\leq$ »:  $-\psi_j(X) \leq 0$ .

При решении задачи нелинейного программирования в общем случае поиск глобального экстремума затруднен, так как задача нелинейного программирования может иметь несколько локальных экстремумов. Это справедливо как для задачи безусловной оптимизации, так и для задачи условной оптимизации, в том числе при ограничениях типа неравенств, даже в случае, когда оптимизируемая функция без учета ограничений имеет только один экстремум.

Проиллюстрируем это на рис. 2.3, где изображены линии постоянного уровня функции  $f(x_1, x_2) = c_v$  ( $v = \overline{1, 3}$ , причем  $c_1 > c_2 > c_3$ ) и заштрихованная область  $XD$  допустимых значений  $X$ , задаваемая системой трех ограничений типа неравенств  $\psi_j(X) \leq 0$  ( $j = \overline{1, 3}$ ). Функция  $f(X)$  имеет безусловный минимум в точке  $X_6^*$  и два локальных минимума  $X_1^*$  и  $X_2^*$  в качестве решения задачи условной оптимизации функции  $f(X)$  при заданных ограничениях типа неравенств.

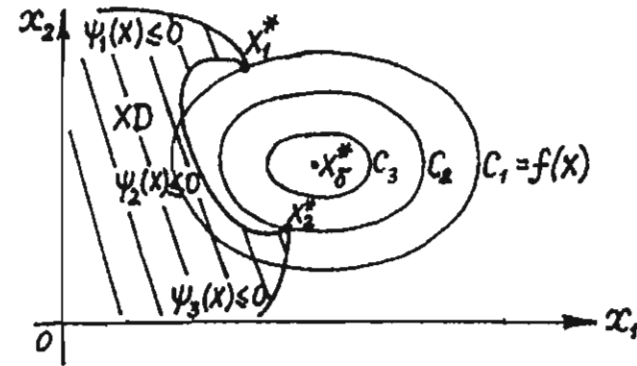


Рис. 2.3

В случае нескольких локальных экстремумов среди них выбирается глобальный минимум и/или максимум на основе сравнения значений функции в локальных экстремумах.

Рассмотрим методы нахождения локальных экстремумов.

*1. Классический метод решения задач условной оптимизации при ограничениях типа неравенств*

Алгоритм решения задачи условной оптимизации функции  $f(X)$  при ограничениях типа неравенств согласно классическому методу состоит в следующем.

1. Определяем безусловный экстремум функции  $f(X)$ , необходимым условием которого является равенство нулю всех частных производных первого порядка  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ). При этом получаем стационарные точки.

2. Среди стационарных находим точки, принадлежащие области  $XD$ . Среди них ищем точки экстремума. Условием минимума (максимума) функции  $f(X)$  в точке будет положительная (соответственно отрицательная) определенность матрицы Гессе в этой точке.

3. Если все стационарные точки не принадлежат области  $XD$  или являются точками перегиба, то точки экстремума ищем на границе этой области (где  $\Psi(X) = 0$ ). Среди граничных точек выбираем те (или ту) точки, в которых функция  $f(X)$  принимает наименьшее и/или наибольшее значение. Эти точки и будут локальными условными экстремумами.

4. Конец алгоритма.

Точка называется граничной точкой множества, если любая ее  $\varepsilon$ -окрестность содержит как точки, принадлежащие этому множеству, так и не принадлежащие ему.

Геометрическая интерпретация классического метода решения задач условной оптимизации функции  $f(X)$  при ограничениях типа неравенств представлена на рис. 2.4, а и б. Изображены линии постоянного уровня функции  $f(x_1, x_2) = c_v$  ( $v = \overline{1, 3}$ , причем  $c_1 > c_2 > c_3$ ) и две различные заштрихованные области  $XD$  и  $XD_1$  допустимых значений  $X$ , задаваемые системой трех ограничений типа неравенств. На рис. 2.4, а условный минимум  $X_y^*$  функции  $f(X)$  совпадает с безусловным  $X_6^*$ . На рис. 2.4, б

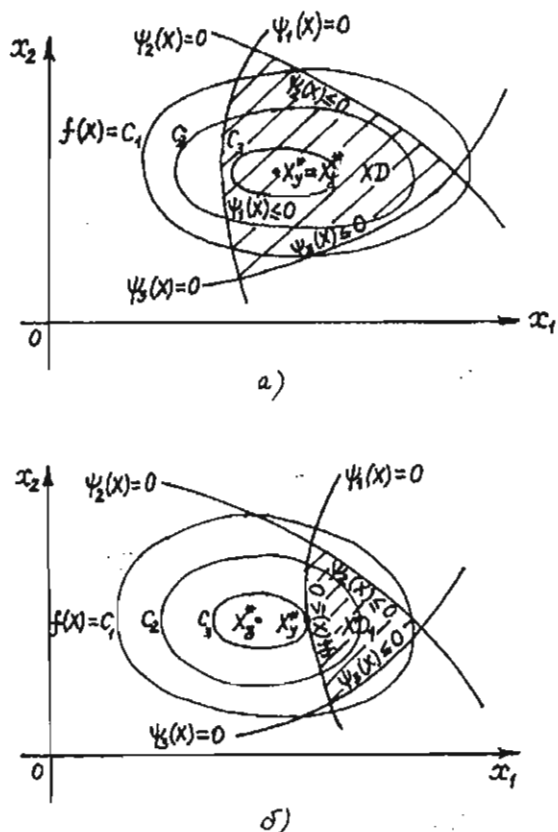


Рис. 2.4

безусловный минимум  $X_6^*$  функции  $f(X)$  не принадлежит области  $XD_1$ , поэтому задача условной оптимизации имеет решение в точке  $X_y^* \neq X_6^*$ . Этот условный экстремум  $X_y^*$  лежит на границе области  $XD_1$ , и в нем достигается наименьшее значение функции  $f(X)$  в этой области.

Классический метод основан на следующих двух теоремах.

**Теорема 1 (Вейерштрасса).** Если функция  $f(X)$  непрерывна и определена на непустом, замкнутом и ограниченном множестве  $XD$ , то функция в этой области принимает по крайней мере один раз наибольшее и наименьшее значение.

**Теорема 2.** Если функция  $f(X)$  определена в допустимой области  $XD$ , то минимальное и/или максимальное значения этой функции, если они существуют, достигаются в одной или более точках, которые принадлежат одному из следующих множеств:

- 1) множеству внутренних точек (в которых  $\Psi(X) < 0$ );
- 2) множеству граничных точек области  $XD$  (где  $\Psi(X) = 0$ );
- 3) множеству точек, в которых функция не дифференцируема. Пример такой точки  $x$  функции  $f(x)$  показан на рис. 2.5.

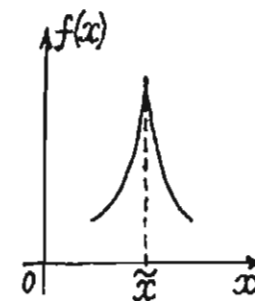


Рис. 2.5

Множество, содержащее все свои граничные точки, называется замкнутым.

Множество  $Q$  называется ограниченным, если существует такое число  $a$ , что для любого  $X \in Q$  выполняется неравенство  $\|X\| < a$ .

Точка называется внутренней точкой множества, если существует некоторая  $\varepsilon$ -окрестность этой точки, содержащая лишь точки данного множества ( $\varepsilon$  — малая положительная величина).

## 2. Метод, основанный на теореме Куна—Такера

Кроме приведенного выше алгоритма для поиска локальных экстремумов, можно также использовать теорему Куна—Такера, которая дает необходимое, но не достаточное условие экстремума функции  $f(X)$  при решении задачи (2.5)—(2.6) условной оптимизации функции при ограничениях типа неравенств.

Теорема Куна — Такера. Необходимое условие минимума функции  $f(X)$  при ограничениях  $\Psi(X) \leq 0$  имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(X) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \\ \lambda_j \psi_j(X) = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \\ \psi_j(X) \leq 0 \quad (j = \overline{1, m}), \\ \lambda_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, m}). \end{array} \right. \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_j \psi_j(X) = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \\ \psi_j(X) \leq 0 \quad (j = \overline{1, m}), \\ \lambda_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, m}). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_j(X) \leq 0 \quad (j = \overline{1, m}), \\ \lambda_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, m}). \end{array} \right. \quad (2.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, m}). \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Необходимое условие максимума функции  $f(X)$  при ограничениях  $\Psi(X) \leq 0$  имеет вид: (2.7)–(2.9) и

$$\lambda_j \leq 0 \quad (j = \overline{1, m}). \quad (2.11)$$

Решая систему (2.7)–(2.10) уравнений и неравенств, получаем стационарные точки, среди которых могут быть локальные минимумы.

Напомним, что точка  $X^*$  называется локальным минимумом функции  $f(X)$ , если существует такая  $\varepsilon$ -окрестность этой точки, что для любой точки  $X$  данной окрестности выполняется условие  $f(X) \geq f(X^*)$ . Для локального максимума  $f(X) \leq f(X^*)$ .

Решением системы (2.7)–(2.9) и (2.11) уравнений и неравенств являются стационарные точки, среди которых могут быть локальные максимумы.

### 3. Метод штрафных функций

Данный метод обладает недостаточно хорошей сходимостью и используется в основном для нахождения первоначального приближения  $X^{(0)}$ . Согласно методу штрафных функций задача (2.5)–(2.6) условной оптимизации функции  $f(X)$  при ограничениях типа неравенств сводится к задаче безусловной оптимизации вспомогательной функции

$$q(X) = f(X) + \omega(X),$$

где  $\omega(X)$  — штрафная функция, имеющая вид:

$$\omega(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } X, \text{ в которых } \Psi(X) \leq 0, \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j \psi_j^2(X) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Константы  $\alpha_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) выбираются положительными при поиске минимума функции  $f(X)$  (отрицательными при максимуме) и достаточно большими с тем, чтобы штрафная функция быстро возрастала при невыполнении ограничений.

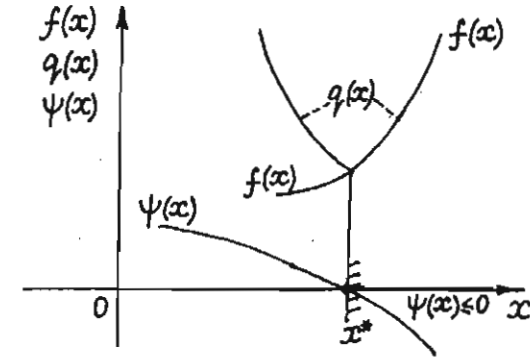


Рис. 2.6

Геометрическая интерпретация метода штрафных функций при  $n = 1$  и  $m = 1$  (т.е. при решении задачи  $\min_x f(x)$ ) приведена на рис. 2.6. Минимум  $q(x)$ , а значит, и  $f(x)$  при  $\psi(x) \leq 0$ , достигается в точке  $x^*$ .

### 4. Методы случайного поиска

Для решения задачи (2.5)–(2.6) условной оптимизации функции  $f(X)$  при ограничениях типа неравенств используются описанные ранее (в первой лабораторной работе при решении задач безусловной оптимизации) все методы случайного поиска, но только с некоторым отличием: сразу после нахождения  $X^*$  по алгоритмам определения  $g^{(k)}$  и  $X^{(k+1)}$  согласно этим методам перед п.3 вычисляем  $\Psi(X)$  и проверяем выполнение условия  $\Psi(X) \leq 0$ . Если оно выполняется, т.е.  $X \in XD$ , то переходим к

п. 3 указанных выше алгоритмов. Если же  $\psi_j(X) > 0$  хотя бы при одном  $j$ , то полученное  $X$  отбрасываем и переходим к п. 1 алгоритмов.

*Задачи выпуклого программирования и их решение*

Задача нелинейного программирования в общем случае может иметь несколько локальных экстремумов с различными значениями функции в них. Поэтому в общем случае найти глобальный экстремум затруднительно, так как для этого вначале надо найти все локальные экстремумы. Но в частном случае, когда задача нелинейного программирования является задачей выпуклого программирования, ее любой локальный экстремум одновременно будет и глобальным, а зачастую и единственным.

Задача выпуклого программирования представляет собой задачу нахождения  $\min_{X \in XD} f(X)$  или  $\max_{X \in XD} f(X)$  при условии, что

$f(X)$  — выпуклая функция при поиске ее минимума и вогнутая функция при максимуме, а допустимое множество  $XD$  является замкнутым и выпуклым.

Множество  $XD$  называется выпуклым, если вместе с любыми принадлежащими ему двумя точками  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  этому множеству принадлежит и соединяющий их отрезок  $Z = [\hat{X}, \tilde{X}]$ , т.е. любая точка  $(\alpha \hat{X} + (1 - \alpha) \tilde{X}) \in XD$ , где  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Пример выпуклого множества при  $n = 2$  представлен на рис. 2.7, а, а невыпуклого множества — на рис. 2.7, б.

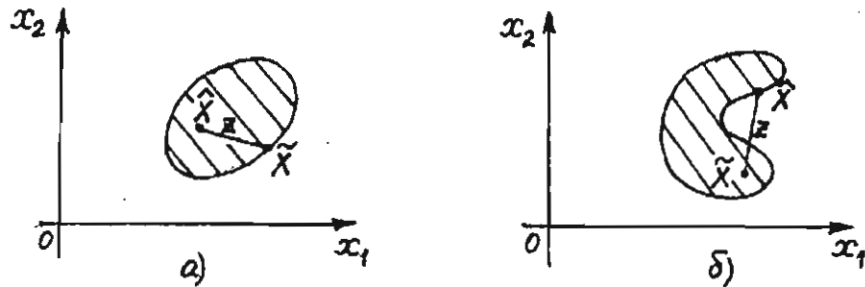


Рис. 2.7

К выпуклым множествам, в частности, относятся отрезок, прямая, круг, треугольник, прямоугольник, плоскость, полуплоскость, евклидово пространство.

Функция  $f(X)$  называется выпуклой на выпуклом множестве  $XD$ , если для любых двух точек  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  этого множества и для любого числа  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) выполняется соотношение

$$f(\alpha \hat{X} + (1 - \alpha) \tilde{X}) \leq \alpha f(\hat{X}) + (1 - \alpha) f(\tilde{X}). \quad (2.12)$$

Функция  $f(X)$  — строго выпукла, если неравенство (2.12) — строгое при  $0 < \alpha < 1$ ,  $\hat{X} \neq \tilde{X}$ . Функция  $f(X)$  — вогнутая, если функция  $-f(X)$  — выпуклая. Функция  $f(X)$  — строго вогнутая, если  $-f(X)$  — строго выпуклая функция. Пример строго выпуклой функции  $f(x)$  при  $n = 1$  и при любом  $x$  приведен на рис. 2.8, а, строго вогнутой — на рис. 2.8, б, пример выпуклой функции для  $x < x_0$  и строго выпуклой для  $x \geq x_0$  — на рис. 2.8, в.

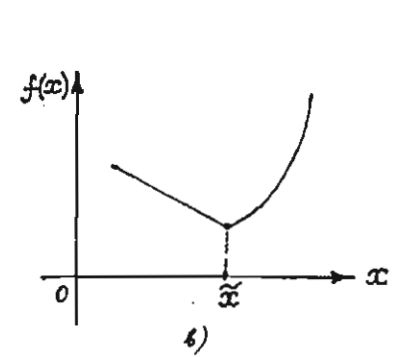
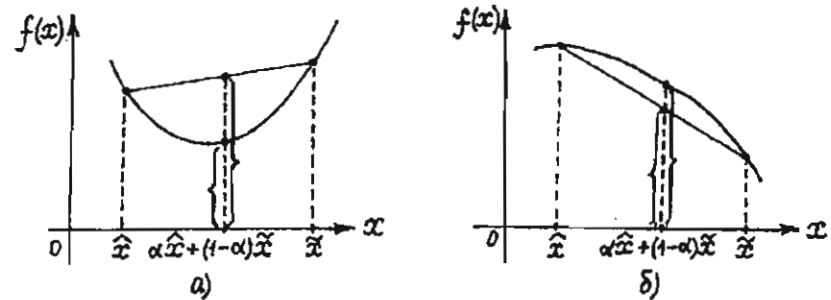


Рис. 2.8

Выпуклая функция на замкнутом и выпуклом множестве  $XD$  обладает следующим свойством: ее любой локальный минимум одновременно является и ее глобальным минимумом, а для строго выпуклой функции — и единственным. Любой локальный максимум вогнутой функции на замкнутом и выпуклом множестве  $XD$  является одновременно и ее глобальным максимумом, а для строго вогнутой функции — и единственным.

Справедлива теорема. Для того, чтобы непустое множество  $XD = \{X \mid \Psi(X) \leq 0\}$  было выпукло, достаточно, чтобы все  $\psi_j(X)$  ( $j = \overline{1, m}$ ) были выпуклыми функциями.

На рис. 2.9, а представлен пример выпуклой функции  $\psi_j(X)$  при  $n = 2$ . При  $\psi_j(X) \leq 0$  получаем, что  $XD$  — выпуклое множество (см. рис. 2.9, б).

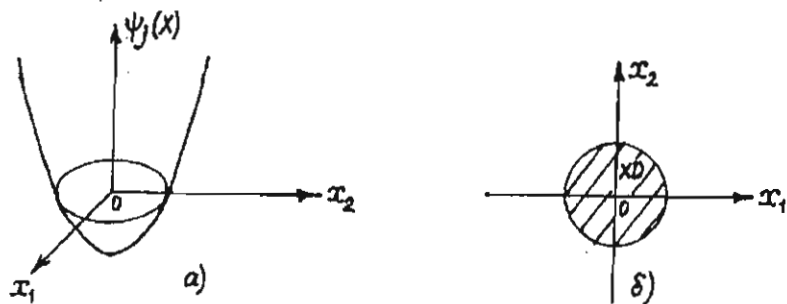


Рис. 2.9

Учитывая данную теорему и определение задачи выпуклого программирования, получаем два вида задачи выпуклого программирования:

$$1) \min_{X \in XD} f(X),$$

$$XD = \{X \mid \Psi(X) \leq 0\}$$

при условии, что  $f(X)$  и все  $\psi_j(X)$  ( $j = \overline{1, m}$ ) — выпуклые функции;

$$2) \max_{X \in XD} f(X),$$

$$XD = \{X \mid \Psi(X) \leq 0\}$$

при условии, что  $f(X)$  — вогнутая функция, а все  $\psi_j(X)$

( $j = \overline{1, m}$ ) — выпуклые функции.

Чтобы определить, является ли функция строго выпуклой или вогнутой, удобно использовать следующий критерий строгой выпуклости и вогнутости: функция  $f(X)$  строго вогнута, если выполняется условие отрицательной определенности ее матрицы Гессе, и строго выпукла при положительной определенности.

Остановимся на решении задачи выпуклого программирования.

При рассмотрении методов решения задач условной оптимизации функции при ограничениях типа неравенств было сформулировано необходимое условие экстремума функции в виде теоремы Куна—Такера с приведенной в ней системой уравнений и неравенств.

В случае задачи выпуклого программирования данное необходимое условие является также и достаточным.

Локальный экстремум (он же глобальный) определяется в результате решения системы уравнений и неравенств (2.7)—(2.10), если задача выпуклого программирования состоит в нахождении минимума функции  $f(X)$ , или системы (2.7)—(2.9) и (2.11) — при задаче выпуклого программирования на максимум.

#### ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ

Для каждого номера варианта  $N = \overline{1, 20}$  в табл. 2.1 заданы две задачи условной оптимизации.

Таблица 2.1

Номер варианта $N$	Первая задача	Вторая задача
1	$\text{extr}_X \begin{cases} (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2, \\ (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 4. \end{cases}$	$\text{extr}_X \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
2	$\text{extr}_X \begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2, \\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9. \end{cases}$	$\text{extr}_X \begin{cases} (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2, \\ x_1 + x_2 \geq 4. \end{cases}$
3	$\text{extr}_X \begin{cases} (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2, \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 = 4. \end{cases}$	$\text{extr}_X \begin{cases} x_1^2 + x_2^2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

Номер варианта N	Первая задача	Вторая задача
4	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \right),$ $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 4.$	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 3)^2 + x_2^2 \right),$ $x_1 + 2x_2 \geq 6.$
5	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \right),$ $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 = 9.$	$\text{extr}_X \left( (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \right),$ $x_1 + x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
6	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \right),$ $x_1^2 + (x_2 + 1)^2 = 4.$	$\text{extr}_X \left( x_1^2 + x_2^2 \right),$ $x_1 + x_2 \geq 4.$
7	$\text{extr}_X \left( (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \right),$ $(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 4.$	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \right),$ $x_1 - x_2 \leq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
8	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \right),$ $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 4.$	$\text{extr}_X \left( x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \right),$ $x_1 + x_2 \geq 5.$
9	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \right),$ $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 9.$	$\text{extr}_X \left( x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \right),$ $x_1 + x_2 \leq 5, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
10	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \right),$ $(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 = 4.$	$\text{extr}_X \left( x_1^2 + x_2^2 \right),$ $2x_1 + x_2 \geq 4.$
11	$\text{extr}_X \left( (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \right),$ $(x_1 + 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 4.$	$\text{extr}_X \left( (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \right),$ $2x_1 + x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
12	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \right),$ $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 4.$	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \right),$ $x_1 + 2x_2 \geq 4.$
13	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \right),$ $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4.$	$\text{extr}_X \left( x_1^2 + x_2^2 \right),$ $x_1 + x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
14	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \right),$ $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 = 9.$	$\text{extr}_X \left( (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \right),$ $2x_1 + x_2 \geq 4.$

Номер варианта N	Первая задача	Вторая задача
15	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \right),$ $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 4.$	$\text{extr}_X \left( x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \right),$ $x_1 + 4x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
16	$\text{extr}_X \left( (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \right),$ $(x_1 + 3)^2 + (x_2 - 2)^2 = 4.$	$\text{extr}_X \left( (x_1 + 3)^2 + (x_2 - 1)^2 \right),$ $x_1 + x_2 \geq 1.$
17	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \right),$ $(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 = 9.$	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 \right),$ $x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
18	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \right),$ $x_1^2 + (x_2 - 3)^2 = 9.$	$\text{extr}_X \left( (x_1 + 2)^2 + x_2^2 \right),$ $2x_1 + x_2 \geq 4.$
19	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \right),$ $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4.$	$\text{extr}_X \left( (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 \right),$ $x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
20	$\text{extr}_X \left( (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \right),$ $(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 3)^2 = 4.$	$\text{extr}_X \left( x_1^2 + x_2^2 \right),$ $x_1 + 2x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ**

Для Вашего варианта задания необходимо:

1. Найти решение первой задачи условной оптимизации функции при ограничениях типа равенств с помощью метода множителей Лагранжа.
2. Изобразить геометрическую интерпретацию применения метода к решению данной задачи условной оптимизации.
3. Найти решение второй задачи условной оптимизации функции при ограничениях типа неравенств согласно методу, основанному на теореме Куна—Такера, и изобразить геометрическую интерпретацию применения метода к решению данной задачи.
4. Проанализировать результаты и показать их преподавателю.
5. Выполнить на ЭВМ решение каждой из двух заданных задач условной оптимизации функции с помощью различных методов, в том числе итерационных.



6. Провести сравнительный анализ результатов решения задач условной оптимизации функции разными методами и сформулировать выводы.

### ПРИМЕР

Пусть номер варианта задания  $N = 20$ . Тогда заданы следующие две задачи условной оптимизации:

$$1) \underset{X}{\text{extr}} \left( (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \right),$$

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 3)^2 = 4;$$

$$2) \underset{X}{\text{extr}} \left( x_1^2 + x_2^2 \right),$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Найдем решение первой задачи по методу множителей Лагранжа. Данная задача условной оптимизации функции

$$f(X) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

при ограничении  $\varphi(X) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4 = 0$  сводится к задаче безусловной оптимизации функции Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + \lambda \left( (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4 \right).$$

Согласно необходимому условию экстремума функции  $L(x_1, x_2, \lambda)$  получим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2(x_1 + 1) + 2\lambda(x_1 + 1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 2(x_2 - 2) + 2\lambda(x_2 - 3) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем  $2(x_1 + 1)(1 + \lambda) = 0$ , откуда получаем  $x_1 = -1$  или  $\lambda = -1$ . Подстановка  $\lambda = -1$  во второе уравнение системы приведет к не имеющему решение уравнению  $2 = 0$ , поэтому  $\lambda = -1$  не является решением системы. Из второго уравнения системы имеем  $x_2 = \frac{3\lambda + 2}{1 + \lambda}$ . Подставив  $x_1 = -1$  и выражение для  $x_2$  в третье уравнение системы, получим квадратное уравнение относительно  $\lambda$ :  $4\lambda^2 + 8\lambda + 3 = 0$

с двумя решениями:  $\lambda = -0,5$  и  $\lambda = -1,5$ . Подставив их в выражение для  $x_2$ , получим два значения  $x_2$ : 1 и 5. В результате имеем две стационарные точки:  $X_1 = (-1; 1)$  при  $\lambda = -0,5$  и  $X_2 = (-1; 5)$  при  $\lambda = -1,5$ .

Проверим в них выполнение достаточного условия  $\underset{X}{\text{extr}} L(X, \lambda)$ .

Для этого находим

$$G(X, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(X, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(X, \lambda) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(X, \lambda) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(X, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда определители второго и первого порядков будут иметь вид:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{vmatrix} = (2 + 2\lambda)^2, \quad \Delta_1 = 2 + 2\lambda.$$

В точке  $X_1 = (-1; 1)$  имеем  $\lambda = \lambda(X_1) = -0,5$ ,  $\Delta_1 = -1 > 0$ ,  $\Delta_2 = 1 > 0$ . Поэтому соблюдается положительная определенность части  $G(X_1, \lambda(X_1))$  матрицы Гессе, соответствующей частным производным второго порядка по  $X$ , т.е.  $X_1^* = X_1$  — точка минимума,  $f(X_1^*) = 1$ .

В точке  $X_2 = (-1; 5)$  имеем  $\lambda = \lambda(X_2) = -1,5$ ,  $\Delta_1 = -1 < 0$ ,  $\Delta_2 = 1 > 0$ . Имеется чередование знаков с отрицательного на положительный, что свидетельствует об отрицательной определенности  $G(X_2, \lambda(X_2))$ , поэтому  $X_2^* = X_2$  — точка максимума,  $f(X_2^*) = 9$ .

Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода множителей Лагранжа для данного примера. На рис. 2.10 изобразим кривую ограничения  $\varphi(X) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 3)^2 - 4 = 0$ , которой является окружность с центром в точке  $(-1; 3)$  и радиусом  $r = \sqrt{4} = 2$ . Проведем также две касающиеся данной кривой ограничения линии постоянно-

го уровня функции  $f(X) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1$  и  $f(X) = 9$ . Ими будут две окружности с центром в точке  $(-1; 2)$  и радиусами  $r_1 = 1$  и  $r_2 = \sqrt{9} = 3$ . Отметим точки  $X_1^* = (-1; 1)$  и  $X_2^* = (-1; 5)$  касания двух указанных линий постоянного уровня функции  $f(X)$  с кривой ограничения  $\varphi(X) = 0$ . Двигаясь из  $X_1^*$  в обоих направлениях вдоль кривой ограничения, получаем, что значение функции  $f(X)$  будет возрастать по сравнению со значением функции в точке  $X_1^*$ , поэтому  $X_1^*$  — точка локального минимума. Точка же  $X_2^*$  является локальным максимумом, т.к. при движении от нее вдоль  $\varphi(X) = 0$  в обоих направлениях значение функции  $f(X)$  будет убывать по сравнению с  $f(X_2^*)$ . Точки  $X_1^*$  и  $X_2^*$  являются одновременно и глобальными экстремумами (соответственно минимумом и максимумом) функции  $f(X)$  при заданном ограничении  $\varphi(X) = 0$ , т.к.  $f(X_1^*) < f(X)$  и  $f(X_2^*) > f(X)$  для всех  $X$ , принадлежащих кривой ограничения  $\varphi(X) = 0$ .

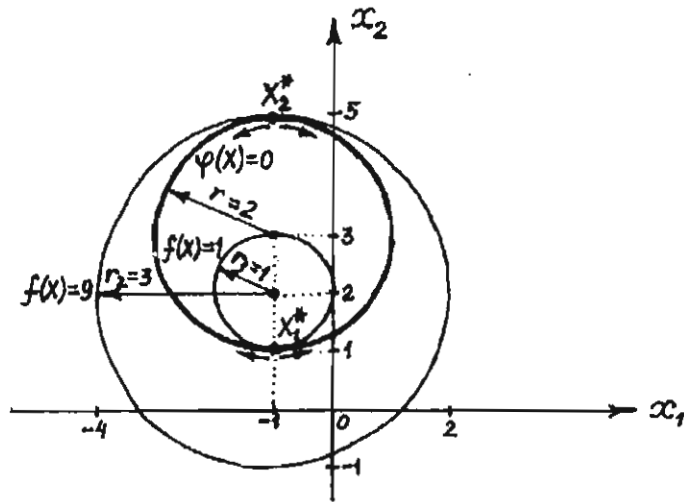


Рис. 2.10

Найдем теперь решение второй задачи условной оптимизации функции  $f(X) = x_1^2 + x_2^2$  при ограничениях типа неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$$

согласно методу, основанному на теореме Куна—Такера.

Приведем ограничения к виду  $\Psi(X) \leq 0$ , умножив на  $-1$  обе части каждого из первых двух неравенств:

$$\Psi_1(X) = -x_1 \leq 0,$$

$$\Psi_2(X) = -x_2 \leq 0,$$

$$\Psi_3(X) = x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0.$$

Вначале определим локальный минимум функции  $f(X)$ . Для этого согласно теореме Куна—Такера найдем необходимое условие минимума  $f(X)$ :

$$2x_1 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \quad (2.13)$$

$$2x_2 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \quad (2.14)$$

$$-\lambda_1 x_1 = 0, \quad (2.15)$$

$$-\lambda_2 x_2 = 0, \quad (2.16)$$

$$\lambda_3 (x_1 + 2x_2 - 4) = 0, \quad (2.17)$$

$$-x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0, \quad (2.18)$$

$$x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0, \quad (2.19)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (2.20)$$

Решим данную систему уравнений и неравенств.

Пусть  $\lambda_3 = 0$ , тогда выполняется (2.17). Из (2.13)–(2.16) следует  $x_1 = \lambda_1 = x_2 = \lambda_2 = 0$ . Поэтому  $X_1 = (0; 0)$ ,  $\Lambda_1 = (0; 0; 0)$ ,  $f(X_1) = 0$ . На рис. 2.11 представлена область  $XD$  допустимых значений  $X$ , задаваемая системой

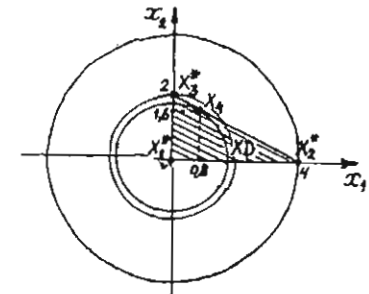


Рис. 2.11

трех ограничений  $\psi_j(X) \leq 0$  ( $j = \overline{1, 3}$ ). Исследуя принадлежащую  $XD$   $\varepsilon$ -окрестность точки  $X_1$ , получаем, что для любой точки  $X$  данной окрестности выполняется условие  $f(X) \geq f(X_1)$ , поэтому  $X_1^* = X_1$  является локальным минимумом функции  $f(X)$ . Других точек, удовлетворяющих системе уравнений и неравенств (2.13)–(2.20), не существует, следовательно,  $X_1^*$  — также глобальный минимум функции  $f(X)$ .

Для определения локальных максимумов по теореме Куна—Такера находим необходимое условие максимума функции  $f(X)$ , которое имеет вид: (2.13)–(2.19) и

$$\lambda_j \leq 0 \quad (j = \overline{1, 3}).$$

Найдем решения данной системы уравнений и неравенств.

Пусть  $\lambda_3 \neq 0$ , тогда согласно (2.17) имеем  $x_1 + 2x_2 = 4$ , откуда получаем

$$x_1 = 4 - 2x_2. \quad (2.21)$$

Тогда возможны следующие три случая:

1. Пусть  $\lambda_1 = 0$ . Из (2.13) следует  $2x_1 = -\lambda_3$ . Тогда по (2.21) имеем

$$\lambda_3 = 4x_2 - 8. \quad (2.22)$$

Из (2.16) при  $\lambda_2 \neq 0$  следует  $x_2 = 0$ . Тогда согласно (2.22) имеем  $\lambda_3 = -8$ . Отсюда из (2.14) получаем  $\lambda_2 = -16$ . Согласно (2.21) при  $x_2 = 0$  имеем  $x_1 = 4$ . Поэтому  $X_2 = (4; 0)$ ,  $\Lambda_2 = (0; -16; -8)$ ,  $f(X_2) = 16$ . Анализируя по рис. 2.11 принадлежащего  $XD$   $\varepsilon$ -окрестность точки  $X_2$ , получаем, что для любой точки  $X$  данной окрестности выполняется условие  $f(X) \leq f(X_2)$ , поэтому  $X_2^* = X_2$  является локальным максимумом функции  $f(X)$ .

2. Пусть  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ , тогда по (2.14) имеем  $x_2 = -\lambda_3$ , а из (2.15) следует  $x_1 = 0$ . Поэтому согласно (2.13) имеем  $\lambda_1 = \lambda_3$ , а по (2.21) получаем  $x_2 = 2$ . Тогда имеем  $\lambda_1 = \lambda_3 = -2$ . Следовательно,  $X_3 = (0; 2)$ ,  $\Lambda_3 = (-2; 0; -2)$ ,  $f(X_3) = 4$ . Исследуя принадлежащую  $XD$   $\varepsilon$ -окрестность точки  $X_3$ , получаем, что для любой точки

$X$  данной окрестности выполняется условие  $f(X) \leq f(X_3)$ , поэтому  $X_3^* = X_3$  является локальным максимумом функции  $f(X)$ .

3. Пусть  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , тогда по (2.13)–(2.14) имеем  $2x_1 = -\lambda_3$ ,  $x_2 = -\lambda_3$ . Тогда согласно (2.21) получаем  $\lambda_3 = -1,6$ ,  $x_1 = 0,8$ ,  $x_2 = 1,6$ . Поэтому  $X_4 = (0,8; 1,6)$ ,  $\Lambda_4 = (0; 0; -1,6)$ ,  $f(X_4) = 3,2$ . Анализируя принадлежащую  $XD$   $\varepsilon$ -окрестность точки  $X_4$ , получаем, что для некоторых точек  $X$  данной окрестности выполняется условие  $f(X) \leq f(X_4)$ , а для других точек  $\tilde{X}$  данной окрестности выполняется условие  $f(\tilde{X}) \geq f(X_4)$ , поэтому  $X_4$  является точкой перегиба (только стационарной точкой функции  $f(X)$ , но не локальным максимумом).

Таким образом, функция  $f(X)$  имеет глобальный минимум в точке  $X_1^*$ , глобальный максимум в  $X_2^*$  (так как  $f(X_2^*) > f(X_3^*)$ ), локальный максимум в  $X_3^*$  и только стационарную точку, но не экстремум, в  $X_4$ . Геометрическая интерпретация применения метода, основанного на теореме Куна—Такера, к решению второй задачи условной оптимизации функции  $f(X)$  при ограничениях типа неравенств представлена на рис. 2.11.

Отметим, что функция  $f(X)$  — строго выпуклая, так как соблюдается положительная определенность ее матрицы Гессе:  $\Delta_1 = 2 > 0$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ . Область  $XD$ , заданная ограничениями, является выпуклой. Поэтому задача  $\min_{X \in XD} f(X)$  — задача выпуклого программирования, а задача  $\max_{X \in XD} f(X)$  — нет.

Следовательно, необходимое условие минимума является также и достаточным, и имеется один локальный минимум  $X_1^*$ , совпадающий с глобальным.

На этом заканчивается решение второй задачи условной оптимизации для варианта задания  $N = 20$ .

Дополнительно найдем экстремум той же функции  $f(X) = x_1^2 + x_2^2$  при другом ограничении:  $x_1 + 2x_2 \geq 4$ , используя метод, основанный на теореме Куна—Такера.

Приведем ограничение к виду  $\psi(X) \leq 0$ , умножив обе части заданного неравенства на  $-1$ , тогда получим  $\psi(X) = -x_1 - 2x_2 + 4 \leq 0$ .

По теореме Куна—Такера имеем следующее необходимое условие экстремума функции  $f(X)$ :

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda = 0, & (2.23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 2\lambda = 0, & (2.24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda(-x_1 - 2x_2 + 4) = 0, & (2.25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 4 \leq 0, & (2.26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 \text{ для нахождения минимума } f(X) \\ \text{и } \lambda \leq 0 \text{ для максимума.} & (2.27) \end{cases}$$

Решим данную систему уравнений и неравенств. Из (2.23)—(2.24) имеем

$$2x_1 = x_2 = \lambda. \quad (2.28)$$

Тогда при  $x_1 = x_2 = 0$  не выполняется (2.26). Поэтому  $x_1 \neq 0$  и  $x_2 \neq 0$ . Отсюда согласно (2.28)  $\lambda \neq 0$ . Поэтому из (2.25) следует  $x_1 + 2x_2 = 4$ . Тогда по (2.28) получаем  $x_1 = 0,8$ ,  $x_2 = \lambda = 1,6$ . Следовательно,  $X^* = (0,8; 1,6)$ ,  $\lambda = 1,6 > 0$ ,  $f(X^*) = 3,2$ . Геометрическая интерпретация применения метода, основанного на теореме Куна—Такера, к решению данной задачи условной оптимизации функции  $f(X)$  при ограничениях типа неравенств представлена на рис. 2.12. Исследуя принадлежащую  $XD_1$   $\epsilon$ -окрестность точки  $X^*$ , получаем, что для любой точки  $X$  данной окрестности выполняется условие  $f(X) \geq f(X^*)$ , поэтому  $X^*$  является локальным минимумом функции  $f(X)$ . Других точек, удовлетворяющих системе уравнений и неравенств (2.23)—(2.27), не существует, следовательно,  $X^*$  — также глобальный минимум функции  $f(X)$ .

Отметим, что функция  $f(X)$  — строго выпуклая, область  $XD_1$  — выпуклая. Поэтому задача  $\min_{X \in XD_1} f(X)$  — задача выпуклого

программирования, а задача  $\max_{X \in XD_1} f(X)$  — нет. Следовательно, необходимое

условие минимума является также и достаточным, и имеется один локальный минимум  $X^*$ , совпадающий с глобальным.

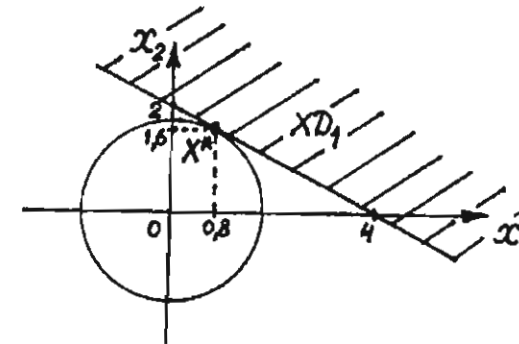


Рис. 2.12

#### СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Наименование работы.
2. Цель работы.
3. Решаемые задачи согласно Вашему варианту задания.
4. Решение первой задачи условной оптимизации функции при ограничениях типа равенств с помощью метода множителей Лагранжа и геометрическая интерпретация применения метода к решению данной задачи.
5. Решение второй задачи условной оптимизации функции при ограничениях типа неравенств согласно методу, основанному на теореме Куна—Такера, и геометрическая интерпретация применения метода к решению данной задачи.
6. Полученные на ЭВМ результаты решения каждой из двух задач условной оптимизации функции.
7. Выводы.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Перечислите методы решения задач условной оптимизации при ограничениях типа равенств и сравните их между собой.
2. В чем состоят методы множителей Лагранжа и поиска седловой точки функции Лагранжа?

3. Перечислите методы решения задач условной оптимизации при ограничениях типа неравенств и сравните их между собой. Опишите классический метод решения таких задач и метод, основанный на теореме Куна—Такера.

4. В чем состоит задача выпуклого программирования и ее решение?

5. Найдите решение заданной преподавателем задачи условной оптимизации функции с помощью выбранных Вами трех методов.

### Работа 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы: изучить и практически овладеть методами решения задач линейного программирования.

#### ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

#### Задачи линейного программирования и их геометрическая интерпретация

Задачи линейного программирования (ЗЛП) — это задачи математического программирования при условии, что линейными являются как целевая функция, так и все функции в ограничениях. Линейной называется функция вида

$$f(X) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

где  $c_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ) — константы.

В литературе существуют различные формы записи ЗЛП.

Основная форма записи имеет вид:

$$\max_X \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (3.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq a_{j0} \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.2)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.3)$$

От основной формы записи ЗЛП можно перейти к канонической. Для этого вводятся дополнительные переменные

$$y_j = a_{j0} - \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \geq 0 \quad (j = \overline{1, m}). \quad (3.4)$$

Тогда каноническая форма ЗЛП будет иметь вид (3.1), (3.3) и

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i + y_j = a_{j0}, \quad y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, m}).$$

Общая форма записи ЗЛП имеет вид

$$\text{extr}_X f(X),$$

где  $f(X) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i,$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq a_{j0} \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \geq a_{j0} \quad (j = \overline{m+1, m+k}),$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = a_{j0} \quad (j = \overline{m+k+1, m+k+u}),$$

$$a_{j0} \geq 0 \quad (j = \overline{1, m+k+u}), \quad x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, n}).$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию ЗЛП. Вначале дадим некоторые определения.

Точка  $X_1$ , принадлежащая выпуклому множеству, называется его крайней точкой, если в данном множестве не существует двух других точек  $\tilde{X}$  и  $\tilde{X}$  таких, что точка  $X_1$  может быть выражена их линейной комбинацией  $X_1 = \alpha \tilde{X} + (1 - \alpha) \tilde{X}$ , где  $0 < \alpha < 1$ . На рис. 3.1 приведен пример четырех крайних точек  $X_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ).

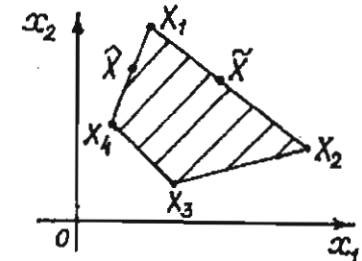


Рис. 3.1

Крайней точкой множества может быть лишь его граничная точка, но не все граничные точки являются крайними.

Всякое непустое, выпуклое, замкнутое, ограниченное множество имеет хотя бы одну крайнюю точку.

Выпуклая, замкнутая область (множество), имеющая конечное число крайних точек, называется выпуклым многогранником (при  $n = 2$  многоугольником), если данная область ограничена. Если она не ограничена, то это выпуклая многогранная (многоугольная) область.

Крайние точки такой области и выпуклого многогранника (многоугольника) называют вершинами.

Каждое ограничение типа неравенства (например,  $y_j \geq 0$  или  $x_i \geq 0$ ) выделяет в пространстве координат полупространство, которому принадлежат все точки, лежащие по одну сторону от гиперплоскости ( $y_j = 0$  или  $x_i = 0$ ) и на самой этой гиперплоскости. Данное полупространство (при  $n = 2$  полуплоскость) является выпуклым множеством. Ограничение типа равенства выделяет в пространстве координат гиперплоскость (при  $n = 2$  плоскость), являющуюся тоже выпуклым множеством. Пересечение всех полупространств и гиперплоскостей, задаваемых всеми ограничениями, если они не противоречивы, будет областью  $XD$  допустимых решений ЗЛП. Область  $XD$  является выпуклой многогранной (при  $n = 2$  многоугольной) областью или выпуклым многогранником (многоугольником или в частном случае отрезком прямой или точкой).

Если существует конечное оптимальное решение ЗЛП (минимум и/или максимум), то оно достигается либо в одной из вершин выпуклого многогранника или многогранной области  $XD$ , либо на выпуклом множестве, порождаемом двумя или более вершинами (на грани многогранника или многогранной области, стороне многоугольника или многоугольной области).

Возможны следующие случаи областей  $XD$  допустимых значений  $X$  и соответствующих им оптимальных решений ЗЛП.

1. Система уравнений и неравенств, задаваемая ограничениями, несовместна. Тогда области  $XD$  не существует и нет решений ЗЛП. Пример отсутствия области  $XD$  при  $n = 2$  изображен на рис. 3.2.

2. Область  $XD$  не является ограниченной.

2.1. Область  $XD$  не ограничена в направлении возрастания функции  $f(X)$ , тогда при поиске максимума этой функции ре-

шение ЗЛП не ограничено, т.е. нет конечного решения ЗЛП, а при поиске минимума функции  $f(X)$  оптимальное решение ЗЛП находится в точке  $X^*$  (точках) области  $XD$ , ближайшей к линии постоянного уровня функции  $f(X) = c_0$ .

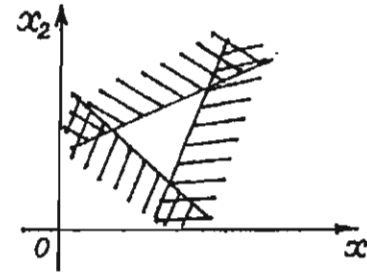


Рис. 3.2

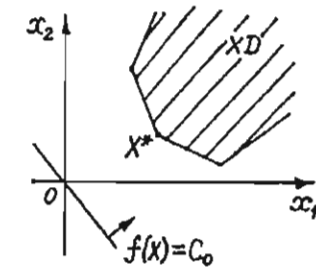


Рис. 3.3

Пример данной области  $XD$  и решения ЗЛП при  $n = 2$  приведен на рис. 3.3. Стрелкой на линии постоянного уровня функции  $f(X) = c_0$  будем показывать направление ее возрастания.

2.2. Аналогично, если  $XD$  не ограничена в направлении убывания функции  $f(X)$ , тогда при поиске минимума этой функции решение ЗЛП не ограничено, т.е. нет конечного решения ЗЛП, а при поиске максимума функции  $f(X)$  оптимальное решение ЗЛП находится в точке  $X^*$  (точках) области  $XD$ , ближайшей к линии постоянного уровня функции  $f(X) = c_0$ .

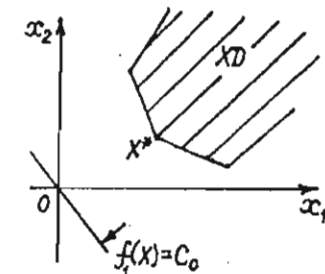


Рис. 3.4

Пример данной области и решения ЗЛП при  $n = 2$  и целевой функции  $f_1(X)$  приведен на рис. 3.4.

3. Наиболее или/и наименее удаленная от  $f(X) = c_0$  грань или грани многогранника (при  $n = 2$  сторона или стороны многоугольника) области  $XD$  параллельна поверхности (линии) постоянного уровня функции  $f(X) = c_0$ . Тогда решением ЗЛП будет все множество точек, лежащих на этих гранях много-

гранника (сторонах многоугольника). При этом минимум достигается в точках с наименьшим в  $XD$  значением функции  $f(X)$ , а максимум — с наибольшим.

На рис. 3.5 представлены примеры таких областей и решений ЗЛП при  $n=2$ . В случае области  $XD$ , изображенной на рис. 3.5, а, минимум достигается на множестве решений, являющихся точками отрезка  $AB$ , а максимум — отрезка  $CD$ . Отрезки  $AB$  и  $CD$  параллельны линиям постоянного уровня функций  $f(X)=c_0$  и  $f_1(X)=c_0$ . Для области  $XD_1$ , показанной на рис.

3.5, б, минимум при решении ЗЛП достигается в точке  $X^*$ , а максимум — на множестве точек отрезка  $CD$ . В случае области  $XD_2$  на рис. 3.5, в максимум достигается в точке  $X^*$ , а минимум — на множестве точек отрезка  $AB$ .

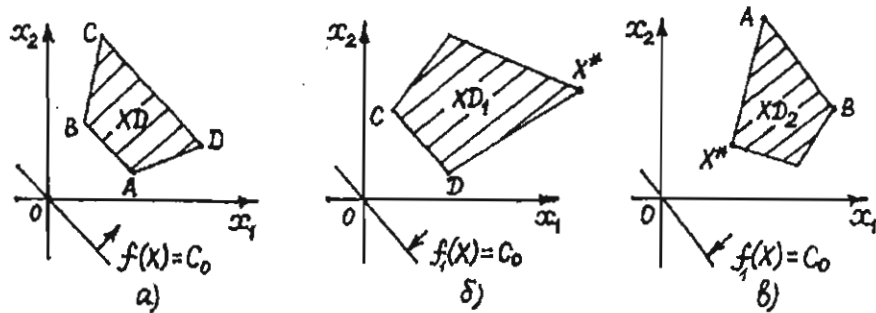


Рис. 3.5

4. Наиболее и наименее удаленные от  $f(X)=c_0$  грани многогранника (при  $n=2$  стороны многоугольника) ограниченной области  $XD$  не параллельны поверхностям (линиям) постоянного уровня функции  $f(X)$ . Тогда ЗЛП имеет единственные минимум и максимум в наиболее и наименее удаленных от  $f(X)=c_0$  точках области  $XD$ . На рис. 3.6, а, б, в приведены примеры при  $n=2$  таких областей  $XD_3$  (в виде четырехугольника) и  $XD_4$  (в виде отрезка прямой) и решений ЗЛП для трех различных целевых функций:  $f(X)$ ,  $f_1(X)$  и  $f_2(X)$ . Минимум достигается в  $X_1^*$ , а максимум — в  $X_2^*$ .

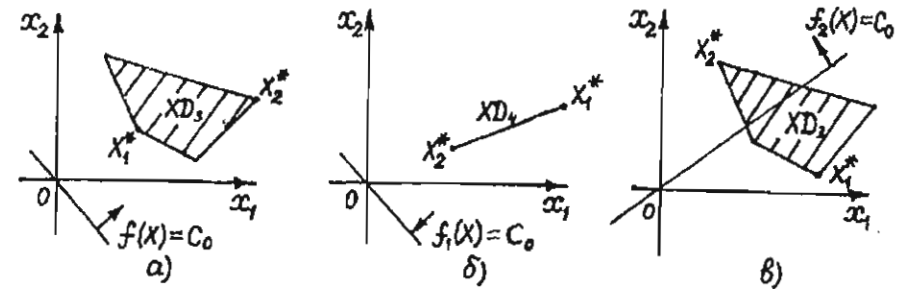


Рис. 3.6

### Графический метод решения ЗЛП

Он удобен для решения двумерных ЗЛП, но его невозможно применить к ЗЛП с размерностью  $n \geq 3$ . Тогда используют симплекс-метод, описываемый ниже.

Алгоритм решения ЗЛП графическим методом состоит в следующем.

1. Графически изображаем область  $XD$  (как решение системы заданных ограничений) и линию постоянного уровня функции  $f(X)=c_0$  с указанием стрелкой направления возрастания целевой функции  $f(X)$ .

2. Если  $XD$  — пустое множество (когда система неравенств, задаваемая ограничениями, несовместна), то решений ЗЛП нет и переходим к п. 5.

3. Находим наиболее и наименее удаленные от линии постоянного уровня функции  $f(X)=c_0$  вершины  $XD$  или/и параллельные этой линии стороны многоугольника (или многоугольной области)  $XD$ , если они существуют.

4. Определяем оптимальные решения ЗЛП, которыми являются найденные в п. 3 вершины многоугольника (многоугольной области)  $XD$  и все множество точек сторон  $XD$ , выделенных в п. 3. При этом минимум достигается в точке (точках) с наименьшим в  $XD$  значением функции  $f(X)$ , а максимум — с наибольшим.

5. Конец алгоритма.

**Симплекс-метод Данцига для решения ЗЛП частного вида**

Рассмотрим решение симплекс-методом ЗЛП в случае ограничений частного вида, когда имеется  $m$  ограничений (3.2) со знаком неравенства « $\leq$ », сводимых к канонической форме (3.4), т.е. решается задача

$$\text{extr}_X f(X),$$

где

$$f(X) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} y_j = a_{j0} - \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \geq 0 & (j = \overline{1, m}), \\ x_i \geq 0 & (i = \overline{1, n}), \\ a_{j0} > 0 & (j = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Симплекс-метод позволяет за конечное число итераций найти оптимальное решение, так как на каждой его итерации осуществляется переход от одной вершины многогранника или многоугольника  $XD$  к другой (от одного базисного решения к другому) в направлении возрастания функции при поиске ее максимума или убывания функции при минимуме, и итерации выполняются вплоть до нахождения вершины (двух вершин), соответствующей экстремуму, а число вершин конечно.

Базисным решением называется такая совокупность значений  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и  $y_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ), что  $n$  из всех  $n + m$  переменных равны нулю, а  $m$  переменных выражены через оставшиеся переменные в соответствии с  $m$  соотношениями связи типа (3.4).  $n$  переменных, приравненных к нулю, называют небазисными. Остальные  $m$  переменных образуют базис, и их называют базисными.

Если базисное решение допустимо, то оно называется базисным допустимым решением.

Симплекс-метод основан на следующих утверждениях линейного программирования:

- 1) если ограничения имеют допустимое решение, то они имеют и базисное решение;
- 2) область  $XD$  допустимых решений является выпуклым множеством;
- 3) базисные допустимые решения соответствуют вершинам выпуклого множества  $XD$ ;
- 4) если целевая функция имеет конечный экстремум, то по крайней мере одно оптимальное решение является допустимым базисным.

Отсюда следует, что оптимальное решение ЗЛП необходимо искать среди допустимых базисных решений, являющихся вершинами многогранника или многогранной области (при  $n = 2$  многоугольника или многоугольной области)  $XD$ .

Симплекс-метод основан на процедуре, называемой шагом модифицированного жорданова исключения с разрешающим элементом  $\alpha_{rs}$  (выбор  $\alpha_{rs}$  описан ниже в п. 3.2 алгоритма решения ЗЛП частного вида). Данная процедура означает переход от табл. 3.1 на текущей итерации  $k$  к табл. 3.2 на следующей итерации  $k + 1$ .

Таблица 3.1

Номер итерации, точка	Базисный столбец	Столбец свободных членов	Небазисные столбцы					
			$-x_1$	$\dots$	$-x_s$	$\dots$	$-x_n$	
$k$	Базис	1	$\alpha_{10}$	$\alpha_{11}$	$\dots$	$\alpha_{1s}$	$\dots$	$\alpha_{1n}$
	$y_1 =$	$\alpha_{10}$	$\alpha_{11}$	$\dots$	$\alpha_{1s}$	$\dots$	$\alpha_{1n}$	
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
	$y_r =$	$\alpha_{r0}$	$\alpha_{r1}$	$\dots$	$\alpha_{rs}$	$\dots$	$\alpha_{rn}$	
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$X^{(k)}$	$y_m =$	$\alpha_{m0}$	$\alpha_{m1}$	$\dots$	$\alpha_{ms}$	$\dots$	$\alpha_{mn}$	
	$f =$	$\alpha_{m+1,0}$	$\alpha_{m+1,1}$	$\dots$	$\alpha_{m+1,s}$	$\dots$	$\alpha_{m+1,n}$	



Таблица 3.2

Номер итерации, точка	Базисный столбец	Столбец свободных членов	Небазисные столбцы				
			Базис	1	$-x_1$	...	$-y_r$
$k+1$	$y_1 =$	$b_{10}$	$b_{11}$	...	$-\frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{rs}}$	...	$b_{1n}$
	...	...	...	...	...	...	...
	$x_s =$	$\frac{\alpha_r}{\alpha_{rs}}$	$\frac{\alpha_{r1}}{\alpha_{rs}}$	...	$\frac{1}{\alpha_{rs}}$	...	$\frac{\alpha_{rn}}{\alpha_{rs}}$
	...	...	...	...	...	...	...
	$y_m =$	$b_{m0}$	$b_{m1}$	...	$-\frac{\alpha_{ms}}{\alpha_{rs}}$	...	$b_{mn}$
$f =$	$b_{m+1,0}$	$b_{m+1,1}$	...	$-\frac{\alpha_{m+1,s}}{\alpha_{rs}}$	...	$b_{m+1,n}$	

Строка  $r$  и столбец  $s$ , где находится разрешающий элемент  $\alpha_{rs}$ , называются разрешающими строкой и столбцом соответственно. В базисном столбце находятся базисные переменные и целевая функция (например, в табл. 3.1 это  $y_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) и  $f$ ). В небазисных столбцах в первой строке таблицы на каждой итерации находятся небазисные переменные со знаком минус (например, в табл. 3.1 на  $k$ -й итерации небазисными переменными являются  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ )).

Алгоритм перехода от табл. 3.1 к табл. 3.2 состоит в следующем:

- 1) все элементы разрешающего столбца  $s$ , кроме разрешающего элемента, меняют знак на противоположный;
- 2) элементы разрешающей строки  $r$  делятся на  $\alpha_{rs}$ ;
- 3) элементы разрешающего столбца  $s$  делятся на  $\alpha_{rs}$ ;
- 4) остальные элементы вычисляются по формуле:

$$b_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{is} \alpha_{rj}}{\alpha_{rs}} \quad (i = \overline{1, m+1}, i \neq r, j = \overline{0, n}, j \neq s); \quad (3.5)$$

5) меняются местами  $x_s$  и  $y_r$ ;

6) конец алгоритма.

Алгоритм решения ЗЛП частного вида симплекс-методом состоит в следующем.

1. Ограничения  $y_j = a_{j0} + \sum_{i=1}^n a_{ji}(-x_i)$  ( $j = \overline{1, m}$ ) и целевую функцию  $f = c_0 + \sum_{i=1}^n (-c_i)(-x_i)$  записываем в виде табл. 3.3 на нулевой итерации. За базисные переменные принимаем  $y_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ), а за небазисные —  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). В столбце свободных членов на нулевой итерации находятся свободные члены из ограничений и целевой функции.

Таблица 3.3

Номер итерации, точка	Базисный столбец	Столбец свободных членов	Небазисные столбцы		
			1	$-x_1$	...
0	Базис	1	$-x_1$	...	$-x_n$
	$y_1 =$	$a_{10}$	$a_{11}$	...	$a_{1n}$
	...	...	...	...	...
	$y_m =$	$a_{m0}$	$a_{m1}$	...	$a_{mn}$
	$f =$	$c_0$	$-c_1$	...	$-c_n$
	$(-f =$	$-c_0$	$c_1$	...	$c_n)$

Если решается задача на максимум функции  $f(X)$ , то в последней строке записываем выражение для « $f =$ », на минимум  $f(X)$  — для « $-f =$ ».

2. Находим допустимое базисное решение.

Так как все  $a_{j0} > 0$  ( $j = \overline{1, m}$ ), то в качестве допустимого базисного решения примем следующее: все небазисные пе-

переменные  $x_i$  табл. 3.3 равны нулю, а каждый  $y_j$  в базисном столбце равен свободному члену, находящемуся в  $j$ -й строке, т.е.

$$\begin{cases} x_i = 0 & (i = \overline{1, n}); \\ y_j = a_{j0} & (j = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Отметим, что при этом все ограничения  $x_i \geq 0$  и  $y_j \geq 0$  выполняются.

3. Определяем оптимальное решение, для чего анализируем последнюю  $f$ -строку табл. 3.3.

3.1. Если все элементы этой строки в небазисных столбцах неотрицательные (т.е.  $-c_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  при поиске максимума  $f(X)$  и  $c_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  при минимуме  $f(X)$ ), то допустимое базисное решение, полученное в п. 2, будет и оптимальным, и решение ЗЛП заканчивается (переходим к п. 4).

3.2. Если среди элементов  $f$ -строки в небазисных столбцах есть по крайней мере один отрицательный, то для его устранения осуществляем итерацию, заключающуюся в выполнении шага модифицированного жорданова исключения с разрешающим элементом  $a_{rs}$ . За разрешающий столбец  $s$  берем тот, в котором находится наибольший по модулю отрицательный элемент  $f$ -строки в небазисных столбцах.

Для определения номера  $r$  разрешающей строки вычисляем отношение  $\frac{a_{j0}}{a_{js}}$  для всех  $j = \overline{1, m}$ , при которых  $a_{js} > 0$ .

В качестве разрешающей выбираем ту строку  $r$ , для которой это отношение минимально:

$$\frac{a_{r0}}{a_{rs}} = \min_{\substack{j = \overline{1, m} \\ a_{js} > 0}} \frac{a_{j0}}{a_{js}}.$$

Если в столбце  $s$  все  $a_{js} \leq 0$  ( $j = \overline{1, m}$ ), то выбираем другой разрешающий столбец  $s$ , в котором находится наибольший по модулю (среди оставшихся) отрицательный элемент  $f$ -строки в небазисных столбцах.

Если в любом выбранном столбце  $s$  все  $a_{js} \leq 0$  ( $j = \overline{1, m}$ ), то это является признаком неограниченности решения, т.е. не существует конечного решения данной ЗЛП. В этом случае переходим к п. 4.

После выбора разрешающих столбца  $s$  и строки  $r$  проводим шаг модифицированного жорданова исключения с разрешающим элементом  $a_{rs}$ , помечаемым в таблице символом «\*». Данный шаг избавляет от отрицательного элемента в  $f$ -строке столбца  $s$  ( $-c_s$  при поиске максимума  $f(X)$  и  $c_s$  при минимуме). Эти шаги повторяем до тех пор, пока все элементы в  $f$ -строке в небазисных столбцах не станут неотрицательными. Тогда решение ЗЛП заканчиваем, и в качестве оптимального решения принимаем следующее: все небазисные переменные (те  $x_i$  и  $y_j$ , которые стоят в небазисных столбцах в первой строке полученной таблицы на последней итерации) равны нулю, а все базисные переменные (все  $x_i$  и  $y_j$  из базисного столбца на последней итерации) равны свободным членам, находящимся в той же строке. Оптимальное значение функции при этом равно значению свободного члена в  $f$ -строке со знаком плюс при нахождении максимума или минус при поиске минимума.

Отметим, что если на некоторой итерации  $k$  в  $f$ -строке в небазисном столбце получен нулевой элемент, то это является признаком множества оптимальных решений данной ЗЛП. Тогда необходимо провести еще одну итерацию  $k+1$  (с выбором небазисного столбца с нулевым элементом в  $f$ -строке в качестве разрешающего столбца), чтобы найти вторую оптимальную точку  $X^{(k+1)}$  с тем же значением функции в ней, что и в точке  $X^{(k)}$  на предыдущей итерации  $k$ . На итерации  $k+1$  в  $f$ -строке в небазисном столбце тоже будет получен нулевой элемент. Оптимальным решением этой ЗЛП является все множество точек отрезка  $[X^{(k)}, X^{(k+1)}]$ , параллельного линии уровня функции  $f(X) = c_0$ .

4. Конец алгоритма.

**Симплекс-метод Данцига**  
для решения ЗЛП общего вида

Решается задача

$$\begin{aligned} & \text{ext}_X f(X), \\ & f(X) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i, \end{aligned} \quad (3.6)$$

при  $m$  ограничениях типа « $\leq$ »:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq a_{j0}, \quad (j = \overline{1, m}), \quad (3.7)$$

к ограничениям типа « $\geq$ »:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \geq a_{j0}, \quad (j = \overline{m+1, m+k}), \quad (3.8)$$

и ограничениям типа « $=$ »:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = a_{j0}, \quad (j = \overline{m+k+1, m+k+u}), \quad (3.9)$$

$$a_{j0} \geq 0 \quad (j = \overline{1, m+k+u}), \quad x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, n}).$$

Алгоритм решения ЗЛП общего вида симплекс-методом состоит в следующем.

1. Вводим дополнительные и искусственные переменные и искусственную функцию, а именно:

1.1. Вводим в (3.7) дополнительные переменные  $y_j \geq 0$  ( $j = \overline{1, m}$ ), прибавляя по одной переменной в левую часть каждого ограничения из (3.7), чтобы свести неравенство типа « $\leq$ » к равенству. Тогда (3.7) переписывается в виде:

$$y_j = a_{j0} - \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \quad (j = \overline{1, m}). \quad (3.10)$$

1.2. Вводим в (3.8) дополнительные переменные  $y_j \geq 0$  ( $j = \overline{m+1, m+k}$ ), со знаком « $-$ » в левую часть ограничений, чтобы свести неравенство типа « $\geq$ » к равенству. При этом в случае равенства нулю всех  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) получим недопустимое решение

$$y_j = -a_{j0} \leq 0, \quad (j = \overline{m+1, m+k}),$$

Поэтому в левую часть ограничений (3.8) также вводят искусственные переменные  $y_j \geq 0$  ( $j = \overline{m+k+1, m+2k}$ ), тогда (3.8) переписывается в виде

$$y_{j+k} = a_{j0} - \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i + y_j \quad (j = \overline{m+1, m+k}). \quad (3.11)$$

1.3. Вводим в левую часть ограничений (3.9) искусственные переменные  $y_j \geq 0$  ( $j = \overline{m+2k+1, m+2k+u}$ ), тогда из (3.9) получаем

$$y_{j+k} = a_{j0} - \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \quad (j = \overline{m+k+1, m+k+u}). \quad (3.12)$$

1.4. Вводим искусственную функцию  $w$ , равную сумме всех искусственных переменных:

$$w = \sum_{j=1}^{k+u} y_{m+k+j} = \sum_{j=1}^{k+u} a_{m+j,0} - x_1 \sum_{j=1}^{k+u} a_{m+j,1} - \dots - x_n \sum_{j=1}^{k+u} a_{m+j,n} + \sum_{j=1}^{k+u} y_{m+j}. \quad (3.13)$$

2. По соотношениям (3.10)–(3.13), полученным из ограничений (3.7)–(3.9), и выражению (3.6) для целевой функции  $f(X)$  формируем первоначальную табл. 3.4 на итерации 0. За небазисные переменные, записанные в табл. 3.4 со знаком « $-$ » в первую строку в небазисные столбцы, принимаем  $x_1, \dots, x_n$  и дополнительные переменные  $y_{m+1}, \dots, y_{m+k}$ , полученные из ограничений (3.8) типа « $\geq$ ». За базисные принимаем остальные переменные.

Находим первое допустимое базисное решение: все небазисные переменные  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и  $y_{m+j}$  ( $j = \overline{1, k}$ ) таблицы 3.4 принимаем равными нулю, а каждый  $y_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) и  $y_{j+k}$  ( $j = \overline{m+1, m+k+u}$ ) в базисном столбце принимаем равным свободному члену, находящемуся в его строке, т.е.

$$\begin{cases} x_i = 0 & (i = \overline{1, n}), \\ y_{m+j} = 0 & (j = \overline{1, k}), \\ y_j = a_{j0} & (j = \overline{1, m}), \\ y_{j+k} = a_{j0} & (j = \overline{m+1, m+k+u}). \end{cases}$$

Таблица 3.4

Номер итераций, точка	Базисный столбец	Столбец свободных членов	Небазисные столбцы					Дополнительные переменные от ограничений типа "≤"	Искусственные переменные от ограничений типа "≥"	Искусственные переменные от ограничений типа "≥"	Искусственные переменные от ограничений типа "≥"	Для минимума f(X)	Для максимума f(X)	Искусственная функция
			-x <sub>1</sub>	-x <sub>n</sub>	-y <sub>m+1</sub>	-y <sub>m+k</sub>	-y <sub>m+k</sub>							
0	Базис	1	a <sub>11</sub>	a <sub>1n</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X <sup>(0)</sup>	y <sub>1</sub> =	a <sub>10</sub>	...	a <sub>1n</sub>	0	...	0	...	0	...	0	...	0	
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
	y <sub>m</sub> =	a <sub>m0</sub>	...	a <sub>m1</sub>	a <sub>m1,n</sub>	-1	...	0	...	...	0	...	0	
	y <sub>m+k+1</sub> =	a <sub>m+1,0</sub>	...	a <sub>m+1,1</sub>	a <sub>m+1,n</sub>	-1	...	0	...	...	0	...	0	
	y <sub>m+2k</sub> =	a <sub>m+k,0</sub>	...	a <sub>m+k,1</sub>	a <sub>m+k,n</sub>	0	...	0	...	...	0	...	0	
y <sub>m+2k+1</sub> =	a <sub>m+k+1,0</sub>	...	a <sub>m+k+1,1</sub>	a <sub>m+k+1,n</sub>	0	...	0	...	...	0	...	0		
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
y <sub>m+2k+u</sub> =	a <sub>m+k+u,0</sub>	...	a <sub>m+k+u,1</sub>	a <sub>m+k+u,n</sub>	0	...	0	...	...	0	...	0		
-f =	-c <sub>0</sub>	c <sub>1</sub>	...	c <sub>n</sub>	0	...	0	...	...	0	...	0		
(или f =	c <sub>0</sub>	-c <sub>1</sub>	...	-c <sub>n</sub>	0	...	0	...	...	0	...	0		
-w =	k+u -∑ <sub>j=1</sub> <sup>k+u</sup> a <sub>m+j,0</sub>	k+u -∑ <sub>j=1</sub> <sup>k+u</sup> a <sub>m+j,1</sub>	...	-∑ <sub>j=1</sub> <sup>k+u</sup> a <sub>m+j,n</sub>	1	...	1	...	...	1	...	1		

3. Искусственная функция  $w$  нужна для нахождения на начальных итерациях базисных решений вплоть до нахождения первого допустимого базисного решения, при котором функция  $w$  становится равной нулю, как и все искусственные переменные (получается первоначальный вид ограничений). Затем находится оптимальное решение ЗЛП с оптимальным значением функции  $f$ . Поэтому решение ЗЛП выполняем в два этапа:

3.1. Проводим итерации, начиная с нулевой (закрывающиеся в выборе разрешающего элемента и осуществлении шага модифицированного жорданова исключения с этим элементом), по минимизации функции  $w$ . Этот этап заканчиваем, когда  $w$  становится равной нулю (стоящему в строке  $-w$  в столбце свободных членов), а все искусственные переменные — небазисными, т.е. тоже равными нулю. Следовательно, в этом случае в строке  $-w$  будут стоять все нули, за исключением столбцов, соответствующих искусственным переменным, там будут 1. Тогда вычеркиваем строку  $-w$  и столбцы, соответствующие искусственным переменным.

Отметим, что если не удастся свести  $w$  к нулю, а все элементы в строке  $-w$  в небазисных столбцах больше или равны нулю, то это является признаком недопустимости решения рассматриваемой ЗЛП. Не существует области  $XD$  допустимых значений  $X$  и решения данной ЗЛП. В этом случае переходим к п. 4.

3.2. Продолжаем итерации уже по оптимизации функции  $f(X)$ . Завершаем, когда все элементы в этой строке в небазисных столбцах становятся больше нуля (или все больше нуля, кроме одного нулевого элемента, тогда проводим еще одну последнюю итерацию).

4. Конец алгоритма.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ

Для каждого номера варианта  $N = \overline{1, 20}$  в табл. 3.5 заданы две ЗЛП.

Таблица 3.5

Номер варианта N	Первая ЗЛП	Вторая ЗЛП
1	$\text{extr}_X (3 + 6x_1 + 2x_2),$ $2x_1 - x_2 \leq 4,$ $x_1 + x_2 \leq 5,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	$\max_X (3 - x_1 - x_2),$ $x_1 + x_2 \leq 10,$ $-x_1 + 2x_2 \geq 4, x_1 \geq 2,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Продолжение табл. 3.5

Номер варианта $N$	Первая ЗЛП	Вторая ЗЛП
2	$\begin{aligned} \text{extr}_X (5 + x_1 - x_2), \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min_X (15 - 2x_1 - x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 7, x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + 4x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$
3	$\begin{aligned} \text{extr}_X (7 - 2x_1 - x_2), \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max_X (2 - 3x_1 + 4x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 - x_2 \geq 2, x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$
4	$\begin{aligned} \text{extr}_X (1 - 3x_1 - x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min_X (4 - 9x_1 - 5x_2), \\ x_1 + 3x_2 \leq 5, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$
5	$\begin{aligned} \text{extr}_X (5 - 4x_1 - 3x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max_X (20 - x_1 - x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 2, x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$
6	$\begin{aligned} \text{extr}_X (12 + x_1 - 2x_2), \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min_X (9 - 5x_1 - 3x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 6, x_2 \leq 4, \\ 4x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$
7	$\begin{aligned} \text{extr}_X (6 - x_1 + 2x_2), \\ 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max_X (5 + 3x_1 + x_2), \\ x_1 - x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$

Продолжение табл. 3.5

Номер варианта $N$	Первая ЗЛП	Вторая ЗЛП
8	$\begin{aligned} \text{extr}_X (10 - x_1 - 2x_2), \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min_X (-3x_1 + 4x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 - x_2 \geq 2, x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$
9	$\begin{aligned} \text{extr}_X (-2 + 3x_1 + 2x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max_X (2 + 3x_1 + 4x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 4, x_1 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$
10	$\begin{aligned} \text{extr}_X (9 - x_1 - x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min_X (1 - 7x_1 + 3x_2), \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 2, x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$
11	$\begin{aligned} \text{extr}_X (15 - 3x_1 - 2x_2), \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max_X (8 + x_1 - 5x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 2, x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$
12	$\begin{aligned} \text{extr}_X (4 + x_1 - x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min_X (12 - x_1 - 4x_2), \\ x_1 + x_2 \leq 6, x_2 \leq 4, \\ 4x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$

Номер варианта $N$	Первая ЗЛП	Вторая ЗЛП
13	$\text{extr}_X (8 + x_1 + 5x_2),$ $x_1 + 3x_2 \leq 6,$ $3x_1 - 4x_2 \leq 12,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	$\max_X (6 + 4x_1 + 2x_2),$ $x_1 + 3x_2 \leq 5, x_2 \leq 1,$ $3x_1 + x_2 \geq 3,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
14	$\text{extr}_X (11 + 2x_1 - x_2),$ $2x_1 - x_2 \leq 4,$ $x_1 + x_2 \leq 5,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	$\min_X (10 - 2x_1 - 3x_2),$ $x_1 + x_2 \leq 7, x_1 - x_2 \leq 3,$ $x_1 + 4x_2 \geq 8,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
15	$\text{extr}_X (5 - x_1 + x_2),$ $x_1 - 2x_2 \leq 2,$ $x_1 + x_2 \leq 5,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	$\max_X (x_1 + 2x_2),$ $-x_1 + 3x_2 \leq 10,$ $x_1 + x_2 \leq 6, x_1 + 5x_2 \geq 10,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
16	$\text{extr}_X (2 - x_1 + 4x_2),$ $3x_1 + 4x_2 \leq 12,$ $x_1 - 3x_2 \leq 3,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	$\min_X (15 - 4x_1 - 3x_2),$ $x_1 + x_2 \leq 7,$ $-2x_1 + 3x_2 \leq 6, x_2 \geq 1,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
17	$\text{extr}_X (3 + 2x_1 - x_2),$ $x_1 + x_2 \leq 3,$ $2x_1 + x_2 \leq 4,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	$\max_X (5 + x_1 + 4x_2),$ $-3x_1 + 4x_2 \leq 12,$ $x_1 + x_2 \leq 10, x_2 \geq 2,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
18	$\text{extr}_X (8 - x_1 - x_2),$ $2x_1 - x_2 \leq 4,$ $x_1 + x_2 \leq 5,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	$\min_X (7 - x_1 - 2x_2),$ $x_1 + x_2 \leq 6, x_2 \leq 4,$ $4x_1 + x_2 \geq 8,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Номер варианта $N$	Первая ЗЛП	Вторая ЗЛП
19	$\text{extr}_X (-3 + 2x_1 + 2x_2),$ $x_1 - 2x_2 \leq 2,$ $x_1 + x_2 \leq 5,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	$\max_X (4 + x_1 + 3x_2),$ $-2x_1 + 3x_2 \leq 6,$ $x_1 + x_2 \leq 7, x_2 \geq 1,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
20	$\text{extr}_X (2 + 6x_1 + 2x_2),$ $2x_1 + 4x_2 \leq 9,$ $x_1 + x_2 \leq 3,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	$\min_X (35 - 3x_1 - 4x_2),$ $x_1 + x_2 \leq 9,$ $3x_1 - x_2 \geq 3, x_2 \geq 3,$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Для Вашего варианта задания необходимо:

1. Определить решение первой ЗЛП с помощью графического метода.
2. Согласно симплекс-методу для первой ЗЛП выполнить итерации 0 и 1 (если процесс поиска экстремума не заканчивается на итерации 0) по нахождению как минимума, так и максимума заданной функции, а также составить таблицу на последней итерации, заполнив в ней только те графы, какие могут быть заполнены исходя из полученной в п. 1 информации о решении первой ЗЛП.
3. Определить решение второй ЗЛП с помощью графического метода.
4. Симплекс-методом выполнить для второй ЗЛП такое число итераций, чтобы искусственная функция  $w$  была сведена к нулю, а также составить таблицу на последней итерации, заполнив в ней только те графы, по которым имеется информация исходя из полученного в п. 3 решения второй ЗЛП графическим методом.
5. Показать полученные результаты преподавателю.
6. Выполнить на ЭВМ решение симплекс-методом каждой из двух ЗЛП, получив две распечатки для первой ЗЛП по нахождению минимума и максимума заданной функции и одну распечатку для второй ЗЛП.

7. Изобразить полученные симплекс-методом в п. 6 на всех итерациях  $k$  точки  $X^{(k)}$  на рисунках с результатами решения каждой из двух ЗЛП графическим методом. Выполнить на ЭВМ решение каждой ЗЛП графическим методом.

Таблица 3.6

8. Сформулировать выводы.

**ПРИМЕР**

Пусть номер варианта задания  $N=20$ . Тогда заданы следующие две ЗЛП:

$$\begin{aligned}
 & 1) \text{extr}_X (2 + 6x_1 + 2x_2), \\
 & \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 9, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases} \quad (3.14) \\
 & 2) \text{min}_X (35 - 3x_1 - 4x_2), \\
 & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 9, \\ 3x_1 - x_2 \geq 3, x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Найдем решение первой ЗЛП.

Результаты применения графического метода к решению данной ЗЛП приведены на рис. 3.7. Функция  $f(X)$  имеет минимум в точке  $X^{(0)} = (0; 0)$  с  $f(X^{(0)}) = 2$  и максимум в точке  $X^{(1)} = (3; 0)$ ,  $f(X^{(1)}) = 20$ .

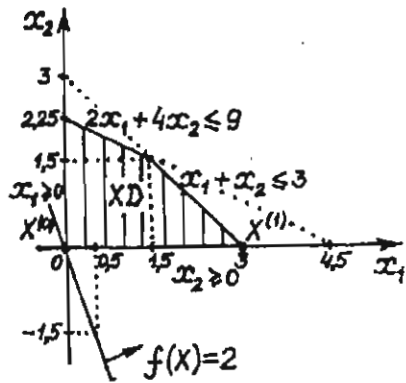


Рис. 3.7

Решим первую ЗЛП симплекс-методом. Для этого введем дополнительные переменные:

$$y_1 = 9 - 2x_1 - 4x_2 \geq 0;$$

$$y_2 = 3 - x_1 - x_2 \geq 0.$$

Процесс определения минимума при решении данной ЗЛП симплекс-методом представлен в табл. 3.6.

Номер итерации, точка	Базисный столбец	Столбец свободных членов	Небазисные столбцы	
			$-x_1$	$-x_2$
0 $X^{(0)}$	Базис	1	$-x_1$	$-x_2$
	$y_1 =$	9	2	4
	$y_2 =$	3	1	1
	$-f =$	-2	6	2

Все элементы  $f$ -строки в небазисных столбцах неотрицательные, поэтому процесс нахождения минимума функции завершится на итерации 0. Функция  $f(X)$  имеет минимум в точке  $X^{(0)} = (0; 0)$  с  $f(X^{(0)}) = 2$ .

Процесс нахождения максимума при решении заданной ЗЛП симплекс-методом приведен в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Номер итерации, точка	Базисный столбец	Столбец свободных членов	Небазисные столбцы	
			$-x_1$	$-x_2$
0 $X^{(0)}$	Базис	1	$-x_1$	$-x_2$
	$y_1 =$	9	2	4
	$y_2 =$	3	1*	1
	$f =$	2	-6	-2
1 $X^{(1)}$	Базис	1	$-y_2$	$-x_2$
	$y_1 =$	3	-2	2
	$x_1 =$	3	1	1
	$f =$	20	6	4

Функция  $f(X)$  имеет максимум в точке  $X^{(1)} = (3; 0)$ ,  $f(X^{(1)}) = 20$ .

Из сравнения результатов решения первой ЗЛП симплекс-методом и графическим методом (см. рис. 3.7) видно, что допустимые базисные решения  $X^{(0)}$  и  $X^{(1)}$  соответствуют вершинам выпуклого множества  $XD$  допустимых значений  $X$ , задаваемого ограничениями (3.14).

На этом заканчивается решение первой ЗЛП для варианта задания  $N=20$ .

Дополнительно найдем решение двух других ЗЛП. Решим симплекс-методом ЗЛП  $\min_X (2 - 6x_1 - 2x_2)$  при

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 9, \\ 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Процесс решения данной ЗЛП приведен в табл. 3.8.

Таблица 3.8

Номер итерации, точка	Базисный столбец	Столбец свободных членов	Небазисные столбцы	
			$-x_1$	$-x_2$
0 $X^{(0)}$	Базис	1	$-x_1$	$-x_2$
	$y_1 =$	9	2	4
	$y_2 =$	6	3*	1
	$-f =$	-2	-6	-2
1 $X^{(1)}$	Базис	1	$-y_2$	$-x_2$
	$y_1 =$	5	-0,67	3,33*
	$x_1 =$	2	0,33	0,33
	$-f =$	10	2	0
2 $X^{(2)}$	Базис	1	$-y_2$	$-y_1$
	$x_2 =$	1,5	-0,2	0,3
	$x_1 =$	1,5	0,4	-0,1
	$-f =$	10	2	0

На первой и второй итерациях в  $f$ -строке в небазисном столбце получен нулевой элемент, что является признаком множества оптимальных решений данной ЗЛП. На этих итерациях получены решения ЗЛП:  $X^{(1)} = (2; 0)$  и  $X^{(2)} = (1,5; 1,5)$  с одинаковым минимальным значением функции  $f(X^{(1)}) = f(X^{(2)}) = -10$ . Минимум этой ЗЛП достигается на множестве точек отрезка  $[X^{(1)}, X^{(2)}]$ , параллельного линии уровня функции  $f(X) = 2$ . Результаты применения графического метода к решению данной ЗЛП приведены на рис. 3.8.

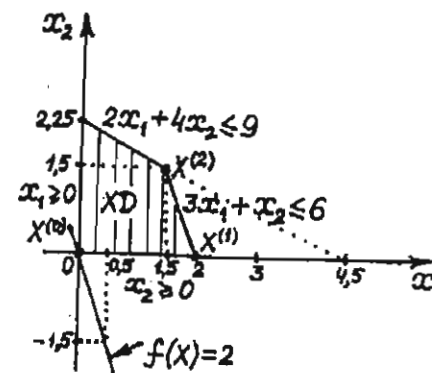


Рис. 3.8

Решим симплекс-методом ЗЛП  $\max_X (x_1 + 2x_2)$  при ограничениях  $x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .

Процесс решения данной ЗЛП приведен в табл. 3.9.

Таблица 3.9

Номер итерации, точка	Базисный столбец	Столбец свободных членов	Небазисные столбцы	
			$-x_1$	$-x_2$
0 $X^{(0)}$	Базис	1	$-x_1$	$-x_2$
	$y_1 =$	2	0	1*
	$f =$	0	-1	-2
1 $X^{(1)}$	Базис	1	$-x_1$	$-y_1$
	$x_2 =$	2	0	1
	$f =$	4	-1	2



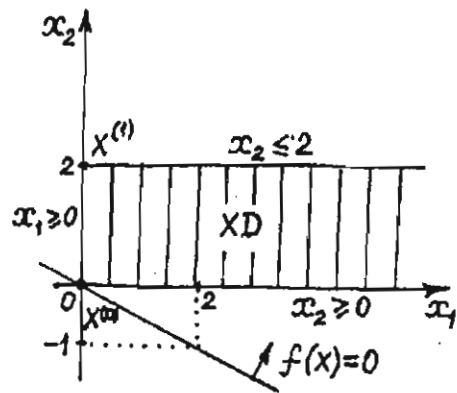


Рис. 3.9

От отрицательного элемента  $-1$  в  $f$ -строке невозможно избавиться, так как в единственном разрешающем столбце нет положительных элементов, что является признаком неограниченности решения ЗЛП. Нет конечного решения данной ЗЛП. Результаты применения графического метода к решению данной ЗЛП изображены на рис. 3.9.

Теперь продолжим выполнение варианта задания  $N=20$ .

Найдем решение второй ЗЛП:

$$\begin{aligned} & \min_X (35 - 3x_1 - 4x_2) \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 9, & 3x_1 - x_2 \geq 3, \\ x_2 \geq 3, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Результаты применения графического метода к решению второй ЗЛП приведены на рис. 3.10. Минимум функции достигается в точке  $X^{(3)} = (3; 6)$  с

$$f(X^{(3)}) = 2.$$

Найдем симплекс-методом решение второй ЗЛП. Для этого вводим дополнительную базисную переменную  $y_1 = 9 - x_1 - x_2$ , дополнительные небазисные переменные  $y_2$  и  $y_3$ , искусственные базисные переменные

$$y_4 = 3 - 3x_1 + x_2 + y_2,$$

$$y_5 = 3 - x_2 + y_3,$$

а также искусственную функцию  $w = y_4 + y_5$ .

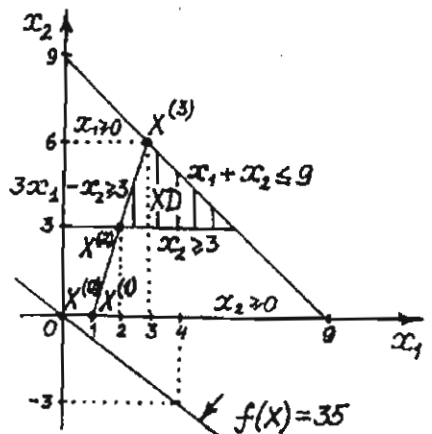


Рис. 3.10

Процесс решения заданной ЗЛП приведен в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Номер итерации, точка	Базисный столбец	Столбец свободных членов	Небазисные столбцы			
			$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$	$-y_3$
0 $X^{(0)}$	Базис	1	$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$	$-y_3$
	$y_1 =$	9	1	1	0	0
	$y_4 =$	3	3*	-1	-1	0
	$y_5 =$	3	0	1	0	-1
	$-f =$	-35	-3	-4	0	0
	$-w =$	-6	-3	0	1	1
1 $X^{(1)}$	Базис	1	$-y_4$	$-x_2$	$-y_2$	$-y_3$
	$y_1 =$	8	-0,33	1,33	0,33	0
	$x_1 =$	1	0,33	-0,33	-0,33	0
	$y_5 =$	3	0	1*	0	-1
	$-f =$	-32	1	-5	-1	0
	$-w =$	-3	1	-1	0	1
2 $X^{(2)}$	Базис	1	$-y_4$	$-y_5$	$-y_2$	$-y_3$
	$y_1 =$	4	-0,33	-1,33	0,33	1,33*
	$x_1 =$	2	0,33	0,33	-0,33	-0,33
	$x_2 =$	3	0	1	0	-1
	$-f =$	-17	1	5	-1	-5
	$-w =$	0	1	1	0	0
3 $X^{(3)}$	Базис	1			$-y_2$	$-y_1$
	$y_3 =$	3			0,25	0,75
	$x_1 =$	3			-0,25	0,25
	$x_2 =$	6			0,25	0,75
	$-f =$	-2			0,25	3,75

Минимум функции  $f(X)$  достигается в точке  $X^{(3)} = (3; 6)$  с  $f(X^{(3)}) = 2$ .

Согласно порядку выполнения работы для второй ЗЛП необходимо было вначале вручную симплекс-методом осуществить только итерации по сведению  $w$  к нулю (в данном случае итерации  $k = \overline{0, 2}$ ), а также составить таблицу на последней итерации, заполнив в ней только три строки базисного столбца и столбца свободных членов (в данном случае  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 6$  и  $-f = -2$ ), содержимое которых известно из решения ЗЛП графическим методом. Затем всю таблицу целиком следует получить на ЭВМ.

Из рис. 3.10 видно, что полученные симплекс-методом допустимые базисные решения  $X^{(2)}$  и  $X^{(3)}$  соответствуют вершинам выпуклого множества  $XD$  допустимых значений  $X$ , задаваемого ограничениями (3.15).

Отметим, что при решении любой ЗЛП общего вида базисное решение  $X^{(0)}$  соответствует началу координат (как и в случае ЗЛП частного вида), а базисное решение  $X^{(1)}$  — ближайшей к линии постоянного уровня  $f(X) = c_0$  точке пересечения одной из прямых, которой принадлежит сторона многоугольника  $XD$ , с осью координат  $0x_1$  или  $0x_2$ . Функция  $w$  сводится к нулю в первой достигнутой по симплекс-методу точке области  $XD$  (в данном случае в точке  $X^{(2)}$ ).

На этом заканчивается решение второй ЗЛП для варианта задания  $N = 20$ .

Дополнительно найдем решение двух других ЗЛП общего вида.

Определим симплекс-методом

$$\min_X (35 - 3x_1 - 4x_2) \quad (3.16)$$

при

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 9, & 3x_1 - x_2 \geq 3, \\ x_2 = 3, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Вводим дополнительную базисную переменную  $y_1 = 9 - x_1 - x_2$ , дополнительную небазисную переменную  $y_2$ , искусственные ба-

зисные переменные  $y_3 = 3 - 3x_1 + x_2 + y_2$  и  $y_4 = 3 - x_2$ , а также искусственную функцию  $w = y_3 + y_4$ .

Процесс решения данной ЗЛП приведен в табл. 3.11. Минимум функции  $f(X)$  достигается в точке  $X^{(3)} = (6; 3)$  с  $f(X^{(3)}) = 5$ .

Результаты применения графического метода к решению ЗЛП (3.16)–(3.17) представлены на рис. 3.11. Областью  $XD$  допустимых значений является отрезок  $[X^{(2)}, X^{(3)}]$ . Из рис. 3.11 видно, что полученные симплекс-методом допустимые базисные решения  $X^{(2)}$  и  $X^{(3)}$  соответствуют вершинам выпуклого множества  $XD$ .

Отметим, что при  $n = 2$ , одном ограничении типа равенства и других ограничениях типа неравенств область  $XD$  допустимых значений  $X$  либо отсутствует, если заданная с помощью равенства прямая проходит вне области  $XD_1$ , полученной на основе остальных ограничений типа неравенств, либо в противном случае представляет собой принадлежащий области  $XD_1$  отрезок прямой, заданной равенством. В этом случае либо минимум достигается в одном из двух концов данного отрезка, а максимум — в другом, либо одновременно максимум и минимум достигаются во всех точках отрезка, если он параллелен линии постоянного уровня функции  $f(X) = c_0$ .

При  $n = 2$ , двух ограничениях типа равенств и других ограничениях типа неравенств область  $XD$  допустимых значений либо отсутствует, либо ею является точка пересечения двух прямых, заданных ограничениями типа равенств, если данная точка принадлежит области  $XD_1$ , заданной остальными ограничениями типа неравенств. В этом случае оптимальное решение (минимум и максимум одновременно) достигается в единственной точке  $XD$ .

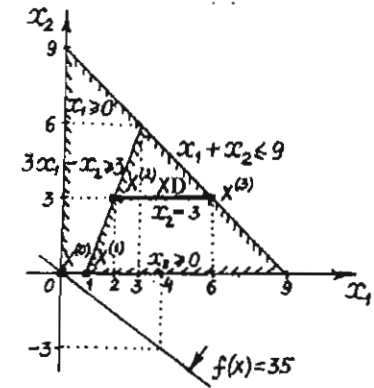


Рис. 3.11

Таблица 3.11

Номер итерации, точка	Базисный столбец	Столбец свободных членов	Небазисные столбцы		
			$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$
0 $X^{(0)}$	Базис	1	$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$
	$y_1 =$	9	1	1	0
	$y_3 =$	3	3*	-1	-1
	$y_4 =$	3	0	1	0
	$-f =$	-35	-3	-4	0
	$-w =$	-6	-3	0	1
1 $X^{(1)}$	Базис	1	$-y_3$	$-x_2$	$-y_2$
	$y_1 =$	8	-0,33	1,33	0,33
	$x_1 =$	1	0,33	-0,33	-0,33
	$y_4 =$	3	0	1*	0
	$-f =$	-32	1	-5	-1
	$-w =$	-3	1	-1	0
2 $X^{(2)}$	Базис	1	$-y_3$	$-y_4$	$-y_2$
	$y_1 =$	4	$-0,33$	$-1,33$	$0,33^*$
	$x_1 =$	2	$0,33$	$0,33$	$-0,33$
	$x_2 =$	3	0	1	0
	$-f =$	-17	1	5	-1
...	$-w =$	0	1	1	0
3 $X^{(3)}$	Базис	1			$-y_1$
	$y_2 =$	12			3
	$x_1 =$	6			1
	$x_2 =$	3			0
	$-f =$	-5			3

Решим симплекс-методом ЗЛП

$$\min_X (2x_1 + 3x_2) \quad (3.18)$$

при

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \geq 7, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Вводим дополнительную базисную переменную  $y_1 = 15 - 3x_1 - 5x_2$ , дополнительную небазисную переменную  $y_2$ , искусственную базисную переменную  $y_3 = 7 - x_1 - x_2 + y_2$  и искусственную функцию  $w = y_3$ .

Процесс решения заданной ЗЛП приведен в табл. 3.12.

Таблица 3.12

Номер итерации, точка	Базисный столбец	Столбец свободных членов	Небазисные столбцы		
			$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$
0 $X^{(0)}$	Базис	1	$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$
	$y_1 =$	15	3*	5	0
	$y_3 =$	7	1	1	-1
	$-f =$	0	2	3	0
	$-w =$	-7	-1	-1	1
1 $X^{(1)}$	Базис	1	$-y_1$	$-x_2$	$-y_2$
	$x_1 =$	5	0,33	1,67	0
	$y_3 =$	2	-0,33	-0,67	-1
	$-f =$	-10	-0,67	-0,33	0
	$-w =$	-2	0,33	0,67	1

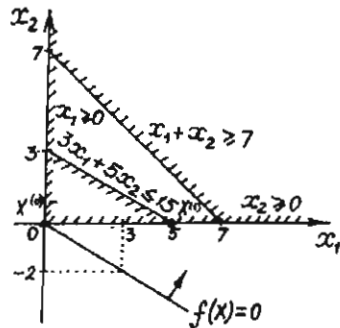


Рис. 3.12

Все элементы строки  $-w$  в небазисных столбцах — неотрицательные, а  $w \neq 0$ , что является признаком недопустимости решения данной ЗЛП. Результаты применения графического метода к решению ЗЛП (3.18) — (3.19) приведены на рис. 3.12. Не существует области  $XD$  допустимых значений  $X$  и решения данной ЗЛП.

#### СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Наименование работы.
2. Цель работы.
3. Решаемые задачи согласно Вашему варианту задания.
4. Решение первой ЗЛП графическим методом.
5. Полученные с помощью симплекс-метода две таблицы решения первой ЗЛП (одна таблица — для нахождения минимума заданной функции, вторая — максимума) на итерациях: 0, 1 (если процесс поиска экстремума не заканчивается на итерации 0) и последней. В каждой из двух таблиц на итерациях 0 и 1 должны быть заполнены все графы, а на последней итерации — только те графы, содержимое которых найдено по результатам решения первой ЗЛП графическим методом.
6. Решение второй ЗЛП графическим методом.
7. Полученная с помощью симплекс-метода таблица решения второй ЗЛП на итерациях от нулевой до той, на которой искусственная функция  $w$  была сведена к нулю, и на последней итерации. В таблице на первых указанных итерациях должны быть заполнены все графы, а на последней итерации — только те графы, содержимое которых найдено по результатам решения второй ЗЛП графическим методом.
8. Полученные на ЭВМ распечатки с результатами решения на всех итерациях трех задач: первой ЗЛП по нахождению максимума заданной функции, первой ЗЛП по поиску минимума и второй ЗЛП.
9. Изображение найденных симплекс-методом на всех итерациях  $k$  точек  $X^{(k)}$  на рисунках с результатами решения двух ЗЛП графическим методом.

10. Выводы на основе анализа результатов решения ЗЛП с помощью графического метода и симплекс-метода.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. В чем состоят ЗЛП, их геометрическая интерпретация и графический метод решения ЗЛП?
2. На чем основан симплекс-метод решения ЗЛП?
3. В чем заключается алгоритм решения ЗЛП симплекс-методом?
4. Что является признаками неограниченности решения ЗЛП, множества ее оптимальных решений, недопустимости решения ЗЛП?
5. Найдите решение заданной преподавателем ЗЛП с помощью графического метода и симплекс-метода.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Банди Б. Методы оптимизации. — М.: Радио и связь, 1988.
2. Банди Б. Основы линейного программирования. — М.: Радио и связь, 1989.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Работа 1.</i> Методы решения задач безусловной оптимизации . . . . .	3
<i>Работа 2.</i> Методы решения задач условной оптимизации . . . . .	30
<i>Работа 3.</i> Методы решения задач линейного программирования . . . . .	58
Литература . . . . .	90